МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Б. Н. ЕЛЬЦИНА

Диссертационный совет К 730.001.02

на правах рукописи

КАРАСАЕВ ИШЕН КАРАСАЕВИЧ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

01.01.02- дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек-2011

Работа выполнена в Бишкекском
гуманитарном университете им. К. Карасаева

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук **Керимбеков А. К.**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук **Алымкулов К. А.** Кандидат физико-математических наук **Байзаков А. Б.**
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный университет.

Защита состоится «___»______________2011г. в ____ часов на заседании диссертационного совета К 730.001.02 при Кыргызско-Российском Славянском Университете им. Б. Н. Ельцина по адресу: Кыргызстан, 720000, г. Бишкек, ул. Киевская 44.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Кыргызско-Российского Славянского Университета им. Б. Н. Ельцина по адресу: Кыргызстан, 720000, г. Бишкек, ул. Киевская 44.

Автореферат разослан «___»______________2011г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент С. Н. Землянский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dx^2}+a(t)x=0\,, \tag{1}$$

где $a(t)$ непрерывная периодическая функция, в математике принято называть уравнением Хилла. Оно в следующем частном виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2nt\right)x=0\,,$$

где $a_0\neq 0, a_1, a_2, \ldots$ - известные постоянные и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2nt$ абсолютно сходится, встречается в мемуарах Хилла, опубликованных в 1877 году, посвященных исследованию движения Луны. Уравнение (1) в следующем виде

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(\lambda+a\cos 2t)x=0\,,$$

было рассмотрено Матье еще в 1868 году в связи с изучением колебаний эллиптической мембраны. Со времен Хилла и Матье уравнение (1) в том или ином частном виде исследовались многими авторами (Х. Кох, Н. Е. Кочин, А. Пуанкаре, Г. В. Бондаренко, А. П. Проскуряков, В. Ф. Журавлев, К. Г. Валеев, В. В. Болотин и др.) в связи с решением физических, технических и астрономических задач. Поскольку эти задачи были прикладного характера и в связи с отсутствием теоретически разработанного метода решения уравнения Хилла, авторы ограничивались построением приближенных решений, которые в том или ином смысле удовлетворяли потребности практики.

Например, Хилл для решения астрономической задачи ограничивался использованием значения определителя лишь третьего порядка, составленного из центральных строк и столбцов бесконечномерного определителя.

Согласно теории Флоке решение уравнения (1) имеет вид:

$$x(t) = e^{\mu t} \sum_{p=-\infty}^{\infty} y_p e^{ipt} ,$$

где μ - характеристический показатель, а вектор

$$\overline{y} = \left\{ ... - y_n, ... y_{-1}, y_0, y_1, ..., y_n, ... \right\} ,$$

определяется как решение бесконечномерной системы линейных однородных алгебраических уравнений, которая имеет решение лишь в том случае, когда некоторый бесконечномерный определитель, зависящий от μ, равен нулю. Это обстоятельство (например, вопросы существования бесконечномерного определителя, вычисление его значения и т.д.) вносит свои коррективы при разработке методики построения фундаментальной системы решений уравнения Хилла. В этом направлении, несмотря на то, что теория линейных дифференциальных уравнений достаточно развита, на сегодняшний день почти отсутствует теоретически разработанный метод решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Что касается уравнения Хилла (1), то для случая, когда среднее значение a_0 коэффициента $a(t)$ не равно нулю, достигнуты определенные успехи. Обзор литературы показал, что со времен Хилла исследования уравнения (1) проводились только при условии $a_0 \neq 0$, и полученные результаты теряют смысл при $a_0 = 0$. Поэтому случай $a_0 = 0$ условно назовем критическим.

Поскольку уравнение Хилла часто встречается в прикладных задачах, а также ряд важных уравнений, после выполнения некоторых преобразований, приводятся к уравнению Хилла, то полное исследование уравнения Хилла в критическом случае (построение характеристического уравнения и вопросы его разрешимости, разработка алгоритма построения фундаментальной системы решений, поведение фазовых траекторий и др.) является одной из актуальных задач теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Цель работы заключается в разработке конструктивного метода решения уравнения Хилла в критическом случае.

Методика исследования. В процессе исследования использованы методы теории Флоке, характеристических показателей Ляпунова, функций комплексного переменного и бесконечномерной системы линейных однородных алгебраических уравнений, и развиты известные методы исследования уравнения Хилла.

Научная новизна работы. Уравнение Хилла исследовано в критическом случае и получены следующие результаты:

1. Разработан метод поляризации, позволяющий характеристическое уравнение, представляющее собой бесконечномерную систему линейных однородных алгебраических уравнений, преобразовать к каноническому уравнению, которое имеет простую структуру, что позволяет находить корни характеристического уравнения посредством решения квадратного уравнения;
2. Дана полная картина расположения на комплексной плоскости корней промежуточного уравнения, эквивалентного характеристическому уравнению, в зависимости от значения бесконечномерного определителя h;
3. Установлены интервалы изменения характеристических показателей Ляпунова;
4. Разработан алгоритм построения фундаментальной системы решений уравнения Хилла. Доказано, что бесконечная матрица характеристического уравнения обладает свойством нормальности, т. е. свойством конечномерной матрицы, и на основе этого свойства

были построены линейно-независимые частные решения уравнения Хилла;

5. Установлены типы точек покоя линейной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, эквивалентной уравнению Хилла;

6. Приведены результаты численных расчетов для отдельных примеров, которые подтверждают теоретические результаты и показывают, что поведения решений уравнения Хилла очень чувствительны к изменению вида периодического коэффициента $a(t)$.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные результаты представляют как теоретический, так и практический интерес. Предложенная методика построения фундаментальной системы решений уравнения Хилла создает предпосылки для разработки и развития методов решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. С другой стороны, разработанная методика является конструктивной и позволяет довести решение уравнения Хилла до численных расчетов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Общая схема применения разработанного метода поляризации для преобразования бесконечномерной системы линейных однородных алгебраических уравнений (характеристического уравнения) в критическом случае к каноническому виду;

2. Общая схема установления интервалов изменения характеристических показателей Ляпунова в критическом случае в зависимости от значения бесконечномерного определителя;

3. Общая схема построения фундаментальной системы решений уравнения Хилла в критическом случае, основанная на свойствах нормальности бесконечномерной матрицы характеристического уравнения и классификация фазовых траекторий (точек покоя).

Апробация результатов. Результаты работы сообщались: на Всесоюзной конференции по асимптотическим методам теории сингулярно-возмущенных уравнений (Алма-Ата, 1979г.), на международной практической конференции по «Аналитическим экспериментальным методам мат. физики» (Ош, 1984), на семинарах профессора Хапаева М.М. (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1984), профессора Матвеева М.Н. (кафедра матанализа Ленинградского педуниверситета, 1985), на Международной конференции по «Пограничным и внутренним слоям: вычислительные и асимптотические методы» (Новосибирск, 1986), на конференции математиков и механиков Киргизии, посвященной 70-летию Октября (Фрунзе, 1987), на семинаре профессора Умбетжанова Д.У., (Инст. математики и механики НАН Республики Казахстана, 1987), на семинарах академика Иманалиева М.И. (Инст. матем. НАН КР, 1987), члена-корр. АН Укр. Самойленко А.М. (Инст. математики АН Укр., 1988), профессора Фомина В.Н. (Ленинградского университета, 1989), на Всесоюзной конференции «Асимптотические методы сингулярно-возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач» (Бишкек, 1991), на республиканской научной конференции по дифференциальным уравнениям и их приложениям (ОшГУ, 1993), на Международной научной конференции, посвященной 1200-летию Ахмада Ал-Фергани (Фергана, 1999).

На третьей (г.Бишкек, 2008г.) и четвертой (г.Бишкек, 2010г.) международных конференциях «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», на семинаре кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова «Качественная теория дифференциальных уравнений» (руководители: проф. Асташова И.В., проф. Бороских А.В., проф. Розов Н.Х., проф. Сергеев И.Н., 23 апреля 2010г. в 18.30. ауд 16-04), на семинаре кафедры «Прикладной математики и информатики» Кыргызско-Российского Славянского Университета в 2007 – 2011гг. (руководитель проф. Керимбеков А. К.).

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в 10 работах [1-10], приведенных в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, состоящих из 6 разделов, где имеются 15 рисунков и 9 таблиц, списка используемой литературы, содержащего 64 наименований, и приложения, где изложена программа вычислений. Объем текста 109 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении изложена актуальность темы диссертации, цель и краткое содержание работы по главам.

В первой главе, состоящей из трех разделов, приведен обзор работ других авторов, посвященных исследованию уравнения Хилла, изложена методика вывода характеристического уравнения и процедура приведения характеристического уравнения к каноническому виду.

В разделе 1.1. изложен подробный обзор литератур, посвященных исследованию уравнения Хилла.

В разделе 1.2. для уравнения Хилла (1) получено характеристическое уравнение:

$$\Delta_0(\mu) = \det A_0(\mu) = 0 \qquad (3)$$

где $\Delta_0(\mu)$ - матрица системы

$$(\mu + ip)^2 y_p = \sum_{\substack{q=-\infty \\ q \neq p}}^{\infty} a_{p-q} y_q = 0, \ p \in Z, \qquad (4)$$

т.е.

$$A_0(\mu) = [a_{pq}], a_{pp} = (\mu + ip)^2, a_{pq} = a_{p-q}, p \neq q$$

a_p - коэффициенты Фурье разложения,

$$a(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p e^{ipt} \ (a_0 = 0).$$

На основе метода поляризации, предложенного автором, система (4) преобразуется к системе уравнений:

$$(1 + \frac{\alpha}{(\mu + ip)^2 - \alpha}) y_p + \sum_{\substack{q=-\infty \\ q \neq p}}^{\infty} \frac{a_{p-q}}{(\mu + ip)^2 - \alpha} y_q = 0, p \in Z \qquad (5)$$

матрица которой имеет вид:

$$A_1(\mu) = [A_{pq}], A_{pp} = 1 + \frac{\alpha}{(\mu + ip)^2 - \alpha}, A_{pq} = \frac{a_{p-q}}{(\mu + ip)^2 - \alpha}, p \neq q$$

.

Такой подход позволяет находить μ из уравнения

$$\Delta_1(\mu) = \det A_1(\mu) = 0 \tag{6}$$

и для матрицы $A_1(\mu)$ удается доказать (например, методом Коха) сходимость бесконечномерного определителя

$$\Delta_1(\mu) = \det A_1(\mu).$$

В диссертации бесконечномерный определитель $\Delta_1(\mu)$ вычисляется по правилу

$$\Delta_1(\mu) = \lim_{N\to\infty} \Delta_1^N(\mu),$$

где $\Delta_1^N(\mu)$ определитель матрицы

$$A_1^N(\mu) = [A_{pq}], \quad p, q = -N, \dots -1, 0, 1, \dots N,$$

2N+1-порядка. Сходимость бесконечномерного определителя $\Delta_1(\mu)$ можно проверить согласно условиям Коха или Кагана, однако, заметим, что эти условия являются лишь достаточными.

Задача определения μ из уравнения $\Delta_1(\mu) = 0$ является сама по себе сложной задачей и требует дополнительных исследований.

В разделе 1.3. доказано, что функция $\Delta_1(\mu)$ обладает свойством четности и периодичности (с периодом i). Далее установлен ряд полезных формул и доказан ряд лемм.

Лемма 1.3.1. Для функции $\Delta_1(\mu)$ имеет место разложение

$$\Delta_1(\mu) = 1 + r_1(\alpha_1) ctg \pi i(\alpha_1 - \mu) + r_2(\alpha_2) ctg \pi i(\alpha_2 - \mu) \tag{7}$$

где

$$r_1(\alpha_1) = -\frac{\pi i}{\alpha_1 - \alpha_2} R(\alpha_1), \; r_2(\alpha_2) = -\frac{\pi i}{\alpha_2 - \alpha_1} R(\alpha_2)$$

$R(\mu)$ - бесконечномерный определитель, удовлетворяющий соотношению

$$\Delta_1(\mu) = \frac{1}{\mu^2 - \alpha} R(\mu),$$

т.е. имеет место разложение по котангенсам.

Лемма 1.3.2. Функции $r_1(\alpha_1)$ и $r_2(\alpha_2)$ связаны соотношением

$$r_2(\alpha_2) = -r_1(\alpha_1).$$

Лемма 1.3.3. Для функции $\Delta_1(\mu)$ имеет место представление

$$\Delta_1(\mu) = \frac{P(z) + ir_1(\alpha_1)\left[P_1(z) - P_2(z)\right]}{P(z)}, \tag{8}$$

где

$$P_1(z) = (z+\beta_1)(z-\beta_2),\ P_2(z) = (z_1-\beta_1)(z+\beta_2),$$
$$\beta_1 = e^{2\pi\alpha_1},\ \beta_2 = e^{2\pi\alpha_2},\ z = e^{2\pi\mu},$$
$$P(z) = (z-\beta_1)(z-\beta_2).$$

Лемма 1.3.4. Для функции $r_1(\alpha_1)$ имеет место представление

$$r_1(\alpha_1) = \frac{1}{2}\left[\Delta(0) - 1\right] tg\pi i\alpha_1 \qquad (9).$$

Далее устанавливается эквивалентность уравнений

$$\Delta_1(\mu) = 0 \text{ и } P(z) + ir_1(\alpha_1)[P_1(z) - P_2(z)] = 0, \tag{10}$$

и уравнение (10) преобразуется к уравнению вида

$$\sin^2 \pi i\mu = \pi^2 h, \tag{11}$$

где h – бесконечномерный определитель. Уравнение (11) назовем каноническим видом характеристического уравнения (10).

Во второй главе, состоящей из трех разделов, изложены результаты исследований канонического уравнения, интервалы изменения характеристических показателей Ляпунова и приведены формулы их вычисления. Указан алгоритм построения фундаментальной системы решений уравнения Хилла и возможные типы точек покоя.

В разделе 2.1. приведена полная картина расположения на комплексной плоскости корней промежуточного уравнения, эквивалентного характеристическому уравнению. Установлены всевозможные случаи расположения корней промежуточного уравнения в зависимости от значения бесконечномерного определителя h.

В разделе 2.2. согласно расположениям корней промежуточного уравнения вычислены характеристические показатели Ляпунова решений уравнения Хилла, и установлены интервалы изменения их значений. Результаты исследований разделов 2.1 и 2.2 приведены в следующей таблице:

Таблица 2.2.0

Интервалы изменения h	Корни уравнения (2.1.2) и их геометрические характеристики	Интервалы изменения характеристических показателей Ляпунова
$-\infty < h < 0$	$z_1 = 1 - 2\pi^2 h + 2\pi\sqrt{\pi^2 h^2 - h}$, $\lvert z_1 \rvert = z_1$, $\arg z_1 = 0$ $z_2 = 1 - 2\pi^2 h - 2\pi\sqrt{\pi^2 h^2 - h}$, $\lvert z_2 \rvert = z_2$, $\arg z_2 = 0$	$\delta_1 > 0$, $\delta_2 < 0$
$h = 0$	$z_1 = 1$, $\lvert z_1 \rvert = 1$, $\arg z_1 = 0$ $z_2 = 1$, $\lvert z_2 \rvert = 1$, $\arg z_2 = 0$	$\delta_1 = 0$ $\delta_2 = 0$
$0 < h < \dfrac{1}{2\pi^2}$	$z_1 = 1 - 2\pi^2 h + i2\pi\sqrt{h - \pi^2 h^2}$ $\lvert z_1 \rvert = 1$, $\arg z_1 = arctg\,\dfrac{2\pi\sqrt{h - \pi^2 h^2}}{1 - 2\pi^2 h}$ $z_2 = 1 - 2\pi^2 h - i2\pi\sqrt{h - \pi^2 h^2}$, $\lvert z_2 \rvert = 1$,	$\delta_1 = 0$ $\delta_2 = 0$

	$\arg z_2 = -arctg\,\dfrac{2\pi\sqrt{h-\pi^2h^2}}{1-2\pi^2h}$	
$h=\dfrac{1}{2\pi^2}$	$z_1 = i$, $\lvert z_1\rvert = 1$, $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{2}$ $z_2 = i$, $\lvert z_2\rvert = 1$, $\arg z_2 = -\dfrac{\pi}{2}$	$\delta_1 = 0$ $\delta_2 = 0$
$\dfrac{1}{2\pi^2} < h < \dfrac{1}{\pi^2}$	$z_1 = 1-2\pi^2h + i2\pi\sqrt{h-\pi^2h^2}$, $\lvert z_1\rvert = 1$, $\arg z_1 = \pi + arctg\,\dfrac{2\pi\sqrt{h-\pi^2h^2}}{1-2\pi^2h}$ $z_2 = 1-2\pi^2h - i2\pi\sqrt{h-\pi^2h^2}$, $\lvert z_2\rvert = 1$, $\arg z_2 = -\pi - arctg\,\dfrac{2\pi\sqrt{h-\pi^2h^2}}{1-2\pi^2h}$	$\delta_1 = 0$ $\delta_2 = 0$
$h=\dfrac{1}{\pi^2}$	$z_1 = -1$, $\lvert z_1\rvert = 1$, $\arg z_1 = \pi$ $z_2 = -1$, $\lvert z_2\rvert = 1$, $\arg z_2 = \pi$	$\delta_1 = 0$ $\delta_2 = 0$
$\dfrac{1}{\pi^2} < h < \infty$	$z_1 = 1-2\pi^2h + 2\pi\sqrt{\pi^2h^2-h}$, $\lvert z_1\rvert = 2\pi^2h - 1 - 2\pi\sqrt{\pi^2h^2-h}$, $\arg z_1 = \pi$ $z_2 = 1-2\pi^2h - 2\pi\sqrt{\pi^2h^2-h}$, $\lvert z_2\rvert = 2\pi^2h - 1 + 2\pi\sqrt{\pi^2h^2-h}$, $\arg z_2 = \pi$	$\delta_1 < 0$, $\delta_2 < 0$

Рассмотрены несколько примеров и приведены в виде таблиц значения бесконечномерного определителя h, корней z_1 и z_2 промежуточного уравнения и значений характеристических показателей Ляпунова соответствующих корням z_1 и z_2.

Например, для уравнения $x'' + \sin t \cdot x = 0$ результаты численных расчетов приведены в следующей таблице:

Таблица 2.2.1 ($a(t) = \sin t$)

N	h(N)	z1(N)	z2(N)	mu1(N)	mu2(N)
3	**0,462046682**	**-0,06180827**	**-16,17906359**	**-0,4430424856+0,5i**	**0,4430424856+0,5i**
5	**0,459855802**	**-0,06214176**	**-16,09223764**	**-0,4421860706+0,5i**	**0,4421860706+0,5i**
10	**0,459323971**	**-0,06222326**	**-16,07116028**	**-0,4419774753+0,5i**	**0,4419774753+0,5i**
20	**0,459257137**	**-0,06223352**	**-16,06851152**	**-0,441951242+0,5i**	**0,441951242+0,5i**
30	**0,459250408**	**-0,06223455**	**-16,06824484**	**-0,4419486007+0,5i**	**0,4419486007+0,5i**
40	**0,45924877**	**-0,0622348**	**-16,06817991**	**-0,4419479575+0,5i**	**0,4419479575+0,5i**
50	**0,459248186**	**-0,06223489**	**-16,06815678**	**-0,4419477284+0,5i**	**0,4419477284+0,5i**
60	**0,459247928**	**-0,06223493**	**-16,06814656**	**-0,4419476272+0,5i**	**0,4419476272+0,5i**
70	**0,459247797**	**-0,06223495**	**-16,06814136**	**-0,4419475757+0,5i**	**0,4419475757+0,5i**
80	**0,459247723**	**-0,06223496**	**-16,06813844**	**-0,4419475468+0,5i**	**0,4419475468+0,5i**
90	**0,459247679**	**-0,06223497**	**-16,06813668**	**-0,4419475293+0,5i**	**0,4419475293+0,5i**
100	**0,45924765**	**-0,06223497**	**-16,06813555**	**-0,4419475181+0,5i**	**0,4419475181+0,5i**

Как показывают численные расчеты, $h = \lim\limits_{N\to\infty} h(N) \approx 0,45924$ и удовлетворяет неравенству $0,1013 \approx \dfrac{1}{\pi^2} < h < 0,4620 < +\infty$ и $z_1 \approx -0,0622, z_2 \approx -16,038,$ $\delta_1 \approx -0,4419,\ \delta_2 \approx 0,4419$, что подтверждает аналитические результаты.

На рисунке 2.2.1 приведен график зависимости $h = h(N)$,

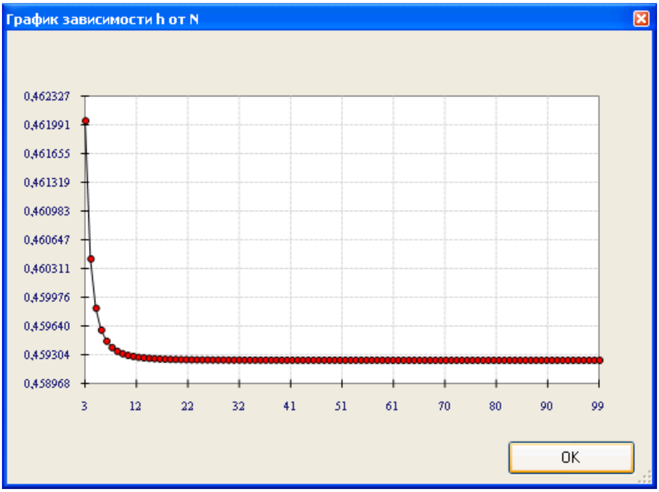

Рис . 2.2.1

который показывает, что значение бесконечномерного определителя h конечно и удовлетворяет оценке

$$0,45923 < h < 0,46204.$$

Заметим, что из расчетов приведенных в таблице 2.2.1 можно установить допускаемые погрешности, при замене точных значений величин h, z_1, z_2 и δ_1, δ_2 их приближенными значениями.

Отметим также, что результат $\left|\delta_1^{(10)}\right| = \left|\delta_2^{(10)}\right| = 0,44127$ почти совпадает с результатом работы Филлипова А.Ф., где $\left|\delta_1\right| = \left|\delta_2\right| = 0,442$, которое им получено при исследовании характеристических показателей уравнения $x'' + \sin t \cdot x = 0$ с других позиций.

В разделе 2.3. изложена методика построения фундаментальной системы решений уравнения Хилла. Решение уравнения (1) ищется в виде (2), где вектор $\overline{y}$ является нетривиальным решением бесконечномерной системы (4). Согласно разработанной методике вектор $\overline{y}$ находится как решение системы

$$A_1(\mu)\overline{y} \equiv A_1(\mu,\alpha)\overline{y}(\alpha) = \theta, \qquad (12)$$

где θ – нулевой вектор.

Лемма 2.3.1. Решение уравнения (12) не зависит от значения α .

Поэтому вектор $\overline{y}$ можно определить из уравнения

$$A_1(\mu,0)\,\overline{y}(0)=\theta .$$

Определитель матрицы вычисляется по правилу

$$\Delta_1(\mu,0)=\det A_1(\mu,0)=\lim_{N\to\infty}\det A_1^{2N+1}(\mu,0),$$

где $A_1^{2N+1}(\mu,0)$ - матрица порядка 2*N*+1, определитель которой вычисляется по известному правилу. При этом элемент y_0, определяется как алгебраическое дополнение элемента 1 нулевой строки, а y_{-n} - элемента $\dfrac{a_N}{\mu^2}$, y_n - элемента $\dfrac{a_{-N}}{\mu^2}$, $N=1,2,3,\ldots$. В силу нормальности матрицы $A_1(\mu,0)$ существует предел

$$A=\lim_{N\to\infty}\det A_1^{2N+1}(\mu,0)<\infty,$$

и алгебраическое дополнение любого элемента любой строки, в частности, нулевой строки матрицы $A_1(\mu,0)$ является конечным числом. Кроме того, ряд

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} y_p ,$$

где y_p - алгебраическое дополнение элементов любой строки матрицы $A_1(\mu,0)$, абсолютно сходится. Поэтому существует решение бесконечномерной системы линейных алгебраических уравнений (12). Таким образом, уравнение Хилла (1) имеет решение, которое можно построить по формуле

$$x_1(t)=e^{\mu_1 t}\sum_{p=-\infty}^{\infty} y_p^{(1)}e^{ipt}, \qquad x_2(t)=e^{\mu_2 t}\sum_{p=-\infty}^{\infty} y_p^{(2)}e^{ipt} .$$

Согласно теории Флоке эти решения являются линейно независимыми и общее решение уравнения Хилла находится по формуле

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = C_1 e^{\mu_1 t} \sum_{p=-\infty}^{\infty} y_p^{(1)} e^{ipt} + C_2 e^{\mu_2 t} \sum_{p=-\infty}^{\infty} y_p^{(2)} e^{ipt},$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

В заключение раздела представим в виде таблицы типы точек покоя системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a(t)\, x_1, \end{cases}$$

которая эквивалентна уравнению Хилла, в зависимости от значения *h*:

Таблица 2.3.1

Интервалы изменения h	δ_1	δ_2	Типы точек покоя
$h \in (-\infty, 0)$	больше нуля	меньше нуля	седло
$h \in \left(0, \frac{1}{\pi^2}\right)$	равно нулю	равно нулю	центр
$h \in \left(\frac{1}{\pi^2}, \infty\right)$	меньше нуля	больше нуля	седло

В приложении построена программа для приближенного решения уравнения Хилла на языке программирования C# 2005.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах

1.Карасаев И.К. Об одном способе определения характеристических показателей линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Известия вузов. Математика-1981.-№3.-С.73-75.
2.Карасаев И.К. Векторное уравнение Хилла // Наука и новые технологии.-№1-2, Бишкек: 2008. С.3-8.
3.Карасаев И.К. Построение характеристического уравнения // Наука и новые технологии.-Бишкек: 2008. №3-4 С.167-173.
4.Карасаев И.К. Упрощение характеристического уравнения // Известия вузов.-Бишкек: 2008. №3-4. С.24-28.
5.Карасаев И.К. Построение фундаментальной системы решений уравнения Хилла. // Известия вузов.- Бишкек: 2007. №3-4. С.240-245.
6.Карасаев И.К. Поведение характеристических показателей Ляпунова в зависимости от малого параметра // Известия вузов. №3-4, Бишкек: 2004. №3-4. С. 70-75.
7.Карасаев И.К. Оценка сверху старшего показателя Ляпунова // Наука и новые технологии. Бишкек: 2008. №1-2.-С.222-225.
8.Карасаев И.К. Построение фундаментальной системы решений уравнения Хилла. // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. – Бишкек: 2010, том 10, №9. – с.107-114
9.Карасаев И.К. Построение характеристического уравнения.// Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. – Бишкек: 2010, том 10, №9. – с.115-122
10.Карасаев И. К. Об одном методе исследования уравнения Хилла.// Дифференциальные уравнения, 2010, Т.46, №11, (1 стр.)

РЕЗЮМЕ

Карасаев Ишен Карасаевич

«Об одном методе исследования уравнения Хилла»

Диссертация представлена на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения.

Ключевые слова: нормальная матрица, бесконечный определитель, характеристическое уравнение, характеристические показатели, фундаментальная система, устойчивость.

В современной теории дифференциальных уравнений для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые в частности могут быть периодическими функциями, не разработан алгоритм построения фундаментальной системы решений.

В диссертации предложена методика построения фундаментальной системы уравнения Хилла в критическом случае, т.е. когда среднее значение коэффициента при неизвестной функции равно нулю, и исследована устойчивость его решений.