НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

УДК 517.968

Сабирова Халидахан Самижановна

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ДАННЫМИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Бишкек – 2007

Работа выполнена в Кыргызско-Узбекском университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН КР Панков Павел Сергеевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Сопуев Адахимжан
кандидат физико-математических наук, ст.н.с. Байзаков Асан

Ведущая организация: Жалалабатский государственный университет, Кыргызстан, 715600, Жалалабат, ул. Ленина 57

Защита диссертации состоится "____"___________2007 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 01.06.315 на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики по адресу: 720071, г. Бишкек – 71, просп. Чуй, 265-а.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики по адресу: 720071, г. Бишкек – 71, просп. Чуй, 265.

Автореферат разослан "____" _____________2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

1. Обзор современного состояния проблемы и выбор темы исследования. В работах П.С.Панкова и Т.М.Иманалиева были получены отдельные результаты (сходимость метода сеток с правой разделенной разностью к решению начальной задачи для простейшего линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка с постоянным коэффициентом), из которых возникла гипотеза: когда исходное данное является аналитическим и задается единой формулой (что также встречается на практике), решение задачи для таких уравнений может существовать и быть устойчивым относительно исходных данных, когда при традиционной постановке задачи ее решение не существует или неустойчиво.

Для подтверждения этой гипотезы была использована известная теорема А.Н.Тихонова: Если C – компактное топологическое пространство, Y – топологическое пространство, отображение $F{:}C\to Y$ непрерывно и взаимно однозначно, то обратное отображение $F^{-1}{:}Y\to C$ также непрерывно.

Задачи для дифференциальных уравнений в частных производных можно в обобщенном виде записать так: пусть $u\in C$ – множество решений какого-либо дифференциального уравнения в частных производных, а оператор F – оператор проектирования (сужения) из C на множество Y начальных и/или краевых условий. Поскольку область определения функций из множества Y является подмножеством множества определения функций из множества C, то при естественных выборах топологии в пространствах C и Y оператор проектирования F является непрерывным. Обычно единственность решения начальной и/или краевой задачи имеет место, то есть отображение $F{:}C\to Y$ взаимно однозначно. Следовательно, если пространство C – компактно, то обратное отображение $F^{-1}{:}Y\to C$ (решение дифференциального уравнения по заданным начальным и/или краевых условиям) будет непрерывным.

Известно, что множество ограниченных в некоторой ограниченной области аналитических функций является компактным. Также являются компактными и другие подмножества класса аналитических функций, что подтвердило выдвинутую гипотезу.

Данную гипотезу можно также подтвердить следующим образом. Корректность различных задач для дифференциальных уравнений в частных производных типов, отличных от эллиптического, ранее традиционно изучалась, когда исходные данные (начальные и краевые условия, коэффициенты) были произвольными функциями, значения которых на различных участках не связаны между собой. Но на практике встречаются непрерывные функции, изменение значения которых в одной точке влечет за собой изменение значений функции и в отдаленных точках (распределение физических величин типа напряженности электрического или магнитного поля). Из известных в математике классов функций наиболее соответствуют данному требованию аналитические и гармонические функции, они также при естественных предположениях ограниченности образуют компактные множества, как было отмечено выше. (При этом само решение не обязано быть аналитическим).

Вместе с тем, обзор литературы показал, что ранее в рамках теории аналитических функций среди уравнений в частных производных исследовались задачи с условиями на некоторых подмножествах только следующие:
- задачи для уравнений эллиптического типа (краевые задачи);
- задачи доказательства локального существования решения (в окрестности подмножества, где заданы значения искомой функции).

Отметим еще, что в ряде работ изучались обратные задачи для аналитических и гармонических решений уравнений в частных производных, то есть априори предполагается, что решение существует, и требуется приближенно восстановить его. Отметим также, что обыкновенные дифференциальные уравнения с аналитическими коэффициентами систематически исследовались в рамках аналитической теории дифференциальных уравнений.

Известно, какую важную роль в теории дифференциальных уравнений в частных производных играют характеристические линии и поверхности. Известно также, что переход к интегральной форме записи уравнений и к понятию "обобщенных решений" дает возможность распространить многие понятия теории дифференциальных уравнений в частных производных на недифференцируемые функции. Вместе с тем, обзор литературы показал, что понятие характеристики было связано раньше только с формой записи дифференциального оператора, и необходимая классификация дифференциальных уравнений в частных производных на основе понятия была не полностью строгой, как признавали и сами авторы. Завершенная классификация имеется только для уравнений первого порядка (они отнесены к гиперболическому типу) и для уравнений второго порядка с двумя переменными. Например, в книге Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными, Москва: Мир, 1966, написано: "Довольно просто дать краткое определение эллиптических (не имеющие вещественных характеристик) или гиперболических (корректно поставлена задача Коши) типов. Однако дать исчерпывающую и в то же время краткую характеристику параболических уравнений нелегко, так как свойства их чрезвычайно разнообразны."

2. Обоснование необходимости и актуальность проведения работы. Из вышеприведенного обзора следует, что исследование дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими данными является актуальным и заполняет имеющийся пробел в общей теории дифференциальных уравнений.

3. Цели исследования. Первой целью нашей работы было выяснение того, какие задачи и при каких условиях являются корректными для дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими данными – известными функциями, в особенности – когда соответствующие задачи с непрерывными и даже сколь угодно гладкими (бесконечно дифференцируемыми) функциями являются некорректными.

В ходе работы было установлено, что строго сформулировать и доказать известные факты о том, что решения уравнений с аналитическими данными имеют различные свойства типа характеристических для различных областей изменения независимых переменных в рамках существовавших определений, связанных не со свойствами семейств функций, а со свойствами самих дифференциальных уравнений (не полностью формализованное подразделение на уравнения эллиптического, гиперболического и параболического типов), не представлялось возможным. Поэтому возникла также вторая цель - разработать теорию, которая отражала бы эту разницу строго, и была расширена первая цель - какие задачи и при каких условиях являются корректно поставленными для уравнений для функций нескольких переменных.

4. Связь работы с научно-исследовательскими проектами: Работа выполнена в рамках проектов по Институту математики НАН КР: "Развитие и приложения методов исследования дифференциальных и интегро-дифференциальных систем" (2003-2004 годы), № госрегистрации 0002795, и "Развитие и приложения аналитических, асимптотических и вычислительных методов в теории динамических систем" (2005-2007 годы), № госрегистрации 0003851. Результаты работы включены в заключительный отчет по первому проекту и промежуточные отчеты за 2005 и 2006 годы по второму проекту.

5. Научная новизна: На защиту выносятся следующие положения:
– концепция обобщенной характеристики, как такого комплекса точек в множестве произвольной природы, что на них значения любой функции из заданного семейства единообразно связаны между собой;
– введение понятий и определение показателя характеристичности семейств функций и функцонально-характеристического соотношения и уравнения;
– вычисление показателя характеристичности для простейших семейств функций, в том числе с использованием точных вычислений на компьютере;
– единое строгое определение показателя характеристичности обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных и выявление на основе этого определения принципиального различия между этими типами уравнений, а также - принципиального различия между свойствами решений дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами в различных подобластях и однотипных, но с различным числом переменных;
– установление классов корректных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими данными функциями в тех случаях, когда соответствующие задачи для уравнений в частных производных с непрерывными и даже сколь угодно гладкими данными функциями являются некорректными, в том числе следующих:
- начальной задачи с обратным временем для уравнения теплопроводности;
- задачи для уравнения теплопроводности с данными на временной прямой;
- задачи с данными на любом отрезке пространственной прямой для уравнений первого и второго порядка, в том числе начальной задачи для уравнения эллиптического типа.

Из этих результатов научному руководителю принадлежит разработка формулировок для показателя характеристичности семейств функций, постановка задачи о выявлении специфических свойств уравнений с аналитическими данными, предложение об использовании точных вычислений на компьютере для определения точного значения показателя характеристичности семейства функций. Д.ф.-м.н. С.Н.Алексеенко принадлежит постановка задачи о применении построенной автором аксиоматической теории характеристик к системам дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Все другие результаты получены лично автором.

Полученные результаты носят теоретический характер, из них вытекает следующий практический вывод. Может возникнуть практическая задача для дифференциального уравнения в частных производных, которая, по известным математическим результатам, является некорректной, но исходные данные не содержат явных особенностей. Тогда, несмотря на эту известную некорректность, можно попытаться применить метод сеток или другие методы для ее приближенного решения, и могут получиться удовлетворительные результаты.

6. Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на:
- Международной конференции по электронике и компьютерным наукам в Кыргызстане (Бишкек, апрель 2004);
- Международной научной конференции студентов и молодых ученых “Тюркско-согдийский синтез и развитие проблемы культурного наследия” посвященной Кыргызской государственности и 10-летию образования Кыргызско-Узбекского университета (Ош, май 2004);
- Республиканской конференции “Проблемы прикладной математики, механики и инженерного образования”, посвященной 50-летию Кыргызского Технического университета им. И.Раззакова и 75-летию проф. Р.У. Усубакунова (Бишкек, сентябрь 2004);
- Международной научной конференции “Дифференциальные уравнения в частных производных и родственные проблемы анализа и информатики” (Ташкент, ноябрь 2004);
- Международной конференции по электронике и компьютерным наукам в Кыргызстане (Бишкек, май 2005);
- семинарах кафедры дифференциальных уравнений, кафедры информатики Кыргызского Национального университета, семинаре Института математики НАН КР.

7. Публикации по теме диссертации: Опубликованы статьи [1], [2], [3], [4], [7], [8], [9], [10], [12], тезисы докладов [5], [11], доклад [6]. В совместных работах [1], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [12] постановка задачи принадлежит научному руководителю, а выполнение расчетов и экспериментов на компьютере, получение основных результатов – автору. В совместной работе [2] постановка задачи принадлежит автору, разработка формулировок -

научному руководителю, обзор литературы и уточнение формулировок – Г.М. Матиевой.

СТРУКТУРА, ОБЪЕМ И КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из трех глав, содержащих 21 раздел (включая "выводы" по 2-й и 3-й главам), заключения, списка использованных источников и приложений, всего 141 страница.

В первой главе производится обзор результатов других авторов, связанных с темой диссертации. В разделе 1.1 – определения характеристики (характеристической поверхности) для заданного дифференциального оператора в частных производных $L(x, \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$. Для линейного оператора L это - гладкое многообразие, частные производные вдоль которого удовлетворяют уравнению, составленному из старших производных L; для любого оператора это – гладкое многообразие, на котором оператор L является внутренним, то есть производные "поперек" этого многообразия имеют меньший порядок, чем производные "вдоль" этого многообразия.

В разделе 1.2 - обзор литературы по классификации дифференциальных уравнений в частных производных, из которого видна неопределенность в классификации уравнений, не относящихся к "крайним" типам – гиперболическим и эллиптическим.

В разделе 1.3 - обзор литературы по дифференциальным уравнениям в частных производных с аналитическими данными – известные теоремы Коши-Ковалевской и Хольмгрена о локальном существовании решений, существование решений краевых задач для уравнений эллиптического типа, и результаты П.С.Панкова и Т.М.Иманалиева для уравнения

$u'_y(x,y) + a\, u'_x(x,y) = 0.$

В разделе 1.4 - обзор литературы по обратным задачам для дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими данными, то есть для задач, где существование решения предполагается заранее, в том числе – найденные Д.С.Гильямом, Д.Р.Лундом, К.Ф.Мартином достаточные условия приближенной разрешимости обратной задачи для уравнения теплопроводности методом, основанным на дискретной выборке.

Для изложения содержания в работе применяется методический прием, использованный в диссертации Ж.К.Жээнтаевой "Метод структурного сращивания решения модельного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой", Бишкек, 2004. Доказательства некоторых теорем сначала производятся для частных случаев, а потом – для общего случая. Хотя из доказательства для общего случая формально следуют все частные, но, по нашему мнению, после изложения идеи на частном случае общее доказательство становится более ясным.

В соответствии с поставленной целью, во второй главе предлагается новый подход к понятию "характеристика".

В разделе 2.1 показано, что, если взять соответствующим образом обобщенное понятие характеристики за основу, то можно распространить теорию характеристик и на неизмеримые функции, и на функции, определенные на абстрактных множествах. Также этот подход дает критерий для различения различных типов уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами исключительно по свойствам их решений. В связи с этим в этом разделе вводятся определения и производится построение аксиоматической теории обобщенных характеристик семейств функций.

Вводятся понятия функционально-характеристического соотношения n-го порядка – связи между n значениями аргумента (предикат C_X), при условии его истинности - связи между этими n значениями аргумента и n соответствующими значениями функции (предикат C_{XY}), и соответственно - функционально-характеристического уравнения n-го порядка, если эта связь выражается равенством с некоторой $2n$-местной функцией ($C_H=0$).

Требуется также, чтобы:

- эти соотношения были симметрическими;
- любое значение аргумента было связано с другими значениями;
- изменение точно одного из n значений функции делает предикат C_{XY} ложным, и соответственно - функцию C_H не равной нулю.

Если все функции некоторого семейства Ω удовлетворяют такому соотношению (уравнению), но не удовлетворяют соотношению меньшего порядка, то семейство называется n-характеристическим. Если только функции этого семейства удовлетворяют такому соотношению (уравнению), но не удовлетворяют соотношению меньшего порядка, то семейство называется n-характеристически определенным.

Непосредственно из этих определений следует

Л е м м а 1. Если для некоторого натурального*,* любых различных между собой $x_1, \dots , x_n$ и любых $y_1, \dots , y_n$ существует такое $f\in\Omega$*,* что $f(x_1)=y_1, \dots , f(x_n)=y_n$, то семейство функций Ω не является n-характеристическим; если такое $f\in\Omega$ существует для любого n*,* то семейство функций Ω не является характеристическим.

Рассмотрим множество Ω_2 функций двух переменных, представимых в виде суммы $f(x) \equiv f(\xi_1, \xi_2) = f_1(\xi_1)+f_2(\xi_2)$, где $f_1(\xi), f_2(\xi)$ – любые функции одной скалярной переменной. Если дополнительно потребовать, чтобы эти функции были дважды непрерывно дифференцируемыми, то "гладкое" подсемейство семейства Ω можно определить также, как множество решений уравнения $f''_{\xi_1\xi_2}(\xi_1,\xi_2) = 0$. Здесь можно взять $n=4$*,* функционально-характеристическое соотношение: *"точки* x_1*,* x_2*,* x_3*,* x_4 *образуют координатный прямоугольник, сумма значений функции* $f(x)$ *в концах одной из его диагоналей прямоугольника равна сумме значений функции* $f(x)$ *в концах другой диагонали"*. Соответствующее функционально-характеристическое уравнение можно

записать в виде

$f(v_1,v_2)+f(v_3, v_4) - f(v_3,v_2) - f(v_1, v_4)= 0$ (1)

(число независимых вспомогательных переменных $k=4,\ n=4$), $v_3 \neq v_1, v_4 \neq v_2$.

Из этого тождества поворотом на 45^0 получается известное тождество Асгейрссона, которое в рамках предлагаемой теории является функционально-характеристическим соотношением для волнового уравнения

$f''_{\xi_1\xi_1}(\xi_1,\xi_2) = f''_{\xi_2\xi_2}(\xi_1,\xi_2)$. (2)

В разделе 2.2 рассматриваются операции над функционально-характеристическими соотношениями, которые можно проводить в рамках этой теории: конъюнкции и дизъюнкции, а для функционально-характеристических уравнений – алгебраические операции. Все такие операции можно производить с отождествлением некоторых значений независимой переменной в операндах.

Показано, что достаточно требовать выполнения вышеупомянутых соотношений только для сколь угодно близких между собой точек x_1, x_2, x_3, x_4 (соответственно, близких между собой чисел v_1 и v_3, v_2 и v_4), потому что сложение этого соотношения с самим собой (при соответствующих отождествлениях) позволяет распространить его на любые прямоугольники.

В разделе 2.3 рассматривается составление функционально-характеристических уравнений. Пусть семейство Ω_m $(m=2,3,\ldots)$ содержит функции m аргументов, представимых в виде суммы функций меньшего числа аргументов. Показано, что это семейство является не более, чем 2^m-характеристическим. Обоснован общий вывод: семейство функций, представимых в виде суперпозиции произвольных функций от меньшего числа переменных, и заданных функций, является характеристическим:

Т е о р е м а 1. Пусть $g_1,\ldots, g_p$, $h_1,\ldots, h_q$ – произвольные функции одной скалярной переменной, F – заданная целая вещественно-аналитическая функция $(p+q)$ скалярных переменных. Тогда семейство Ω функций, представимых в виде

$f(\xi_1,\xi_2)= F(g_1(\xi_1),\ldots, g_p(\xi_1), h_1(\xi_2),\ldots, h_q(\xi_2))$, (3)

является не более, чем $(\alpha p+\beta q+1)$-характеристическим, где α и β - такие натуральные числа, что

$\alpha\beta > \alpha p+\beta q$. (4)

Как следствие, получаем: не существует такой функции F, что все гармонические функции двух переменных представляются в виде (3).

Рассмотрен пример $f(\xi_1,\xi_2)= g_1(\xi_1)\, h_1(\xi_2) + h_2(\xi_2)$ $(p=1,\ q=2)$. Неравенство (4) принимает вид $\alpha\beta > \alpha +2\beta$, его минимальное решение $\alpha =5,\ \beta =2$. Теорема 1 дает верхнюю оценку для показателя характеристичности $\alpha+2\beta+1=9$. Другим способом удалось найти уравнение

$$(f(v_1, v_2) - f(v_3, v_2))(f(v_1 + v_4, v_2+ v_5) - f(v_3 +v_4, v_2+v_5)) -$$
$$- (f(v_1, v_2+v_5) - f(v_3, v_2+v_5))(f(v_1 + v_4, v_2) - f(v_3 + v_4, v_2))= 0,$$

то есть это семейство функций – не более, чем 8-характеристическое.

В разделе 2.4 рассмотрены примеры решения функционально-характеристических уравнений. Например, решение уравнения

$$f(v_1,v_2)\, f(v_3,v_4) - f(v_1,v_4)\, f(v_3,v_2) = 0$$

для положительных функций имеет вид $f(v_3,v_4) = g_1(v_3)g_2(v_4)$, где g_1, g_2 - произвольные положительные функции.

В разделе 2.5 с использованием компьютера производится проверка минимальности порядка функционально-характеристических уравнений, что дает возможность определить порядок характеристичности отдельных семейств функций.

Доказано, что семейство функций Ω_2 не является 3-характеристическим; семейство функций Ω_3 не является 7-характеристическим.

Здесь, в силу Леммы 1, нужно доказать, что для любых 7 значений $y_j \in \mathcal{R}$, $j \in 1..7$ можно подобрать такие функции $f_1(\xi_2, \xi_3)$, $f_2(\xi_1,\xi_3)$, $f_3(\xi_1,\xi_2)$, что в любых семи точках их сумма принимает соответствующие значения y_j, $j \in 1..7$. В силу произвольности этих функций $f_1(\xi_2, \xi_3)$, $f_2(\xi_1,\xi_3)$, $f_3(\xi_1,\xi_2)$ существенно только то, являются ли значения аргументов при различных обращениях к этим функциям одинаковыми или разными. Дальнейший отбор дает 336 существенно различных вариантов. Все эти варианты были рассмотрены компьютерной программой.

Отсюда следует, что семейство функций Ω_m является 2^m-характеристическим при $m=2$ и $m=3$.

На основании этих результатов выдвинута гипотеза: семейство функций Ω_m является 2^m-характеристическим для всех m.

В разделе 2.6 приведены примеры преобразования функционально-характеристических уравнений в дифференциальные уравнения при помощи дифференцирования и отождествления различных переменных (при предположении достаточной гладкости всех функций).

Например, из уравнения $f(v_1,v_2)\, f(v_3,v_4) - f(v_1,v_4)\, f(v_3,v_2) = 0$ получено уравнение $\dfrac{\partial^2 f(\xi_1,\xi_2)}{\partial\xi_1\partial\xi_2} f(\xi_1,\xi_2) - \dfrac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial\xi_1}\dfrac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial\xi_2} = 0.$

В разделе 2.7 приведены примеры обратного преобразования дифференциальных уравнений в функционально-характеристические уравнения. Для системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$A_{11}\, u'_x(x,y) + A_{12}\, u'_y(x,y) + B_{11}\, v'_x(x,y) + B_{12}\, v'_y(x,y) = 0,$$

$$A_{21}\, u'_x(x,y) + A_{22}\, u'_y(x,y) + B_{21}\, v'_x(x,y) + B_{22}\, v'_y(x,y) = 0$$

получено достаточное условие 2-характеристичности:

$$A_{21}B_{22} - A_{22}\, B_{21} \neq 0,$$

$$(A_{11}\, B_{22} + A_{21}\, B_{12} - A_{12}B_{21} - A_{22}B_{11})^2 - 4(A_{21}B_{22} - A_{22}\, B_{21})(A_{11}B_{12} - A_{12}\, B_{11}) > 0.$$

В разделе 2.8 – применение построенной теории для классификации дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и в частных производных. Доказано, что обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка с аналитическими данными является локально $(n+1)$-характеристическим. Эта теорема вместе с результатами раздела 2.4 показывает принципиальное различие между дифференциальными уравнениями обыкновенными и в частных производных.

В заключительном разделе 2.9 вся построенная теория применяется к аналитическим и гармоническим функциям. Показано, что одно и то же уравнение для двух переменных в разных подпространствах имеет вид уравнения Лапласа (не характеристическое) и волнового уравнения (4-характеристическое), а также – что волновое уравнение для трех переменных

$$\frac{\partial^2 u(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial \xi_1{}^2} = \frac{\partial^2 u(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial \xi_2{}^2} + \frac{\partial^2 u(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial \xi_3{}^2}$$ – не характеристическое.

В третьей главе рассматриваются различные задачи для функций нескольких переменных с аналитическими данными, как новые, так и типов, которые рассматривались ранее, с непрерывными или достаточно гладкими данными.

В разделе 3.1 используется метод разложения в ряд для решения следующих задач.

Решение функционально-характеристического уравнения (1) для семейства функций Ω_2 в аналитических функциях.

Доказательство существования решения уравнения теплопроводности
$u_t'(t,x)= au_{xx}''(t,x)\ (a>0)$, при $t>0$ (5)
с условием на временной прямой
$u(0,t) = \psi(t)$, (6)
если $\psi(t)$ - целая аналитическая функция экспоненциального типа.

Доказательство существования решения уравнений вида
$u'_t(x,t) = a_m u^{(m)}_{x\ldots x}(x,t)+\ldots+ a_0 u(x,t) + f(x)$, при $t>0$ (7)
с условием
$u(x,0) = \varphi(x)$, (8)
если $\varphi(x)$ - целая аналитическая функция экспоненциального типа. В виде (7) - (8) также записывается задача с обратным временем для уравнения теплопроводности $(m=2,\ a_2<0,\ a_1=a_0=0)$.

Построен пример такой задачи с целой аналитической функцией $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-\frac{1}{3}} x^n$, не имеющей аналитического решения. Этот пример показывает существенность требования "экспоненциального типа".

Также доказана корректность задачи
$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t'(x,0) = \psi(x)$ (9)

для уравнения эллиптического типа

$u_{tt}''(x,t) = -u''_{xx}(x,t)$, (10)

если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - целые аналитические, экспоненциального типа,

В разделе 3.2 развивается новый комбинированный метод дифференцирования по одной из переменных и малых шагов по другой переменной. При малом $h>0$ из (7) при $m=2,\ a_2=a,\ a_1=b,\ a_0=0$ имеем:

$$u(x,t+h)\approx u(x,t)+h\,u_t'(x,t)=u(x,t)+h(au_{xx}''(x,t)+bu_x'(x,t)+f(x)).\quad (11)$$

Введем следующий оператор для бесконечно дифференцируемых функций: $D_k := \dfrac{d^k}{dx^k}$. Из (11) получаем: $u(x,h)\approx(E+ahD_2+bhD_1)\varphi(x)+hf(x)$, и т.д. ($E$ – единичный оператор).

Достаточные условия для сходимости этого метода при $h\to 0$:

Т е о р е м а 2. Если $b=0,\ f(x)=0$, функция $\varphi(z)$ – целая аналитическая, экспоненциального типа, то решение (5)-(6) существует, причем для любого

$$t>0:\ \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\mathrm{E}+\frac{at}{n}D_2\right)^n\varphi(x)\right\}=u(x,t).$$

В разделе 3.3 предлагается использование метода сеток применительно к нашей специфике - для установления класса корректных постановок задач для семейства функций Ω_a, удовлетворяющих функционально-характеристическому соотношению: $(x_1-ay_1=x_2-ay_2)\Rightarrow(u(x_1,y_1)=u(x_2,y_2))$ или функционально-характеристическому уравнению:
$u(x_1,y_1)-u(x_1+ay_2,y_1+y_2)=0,\ y_2\neq 0)$. (Гладкое подмножество этого семейства удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка).

Доказано, что задача: $u(x,0)=\varphi(x),\ x\in P$ с целой аналитической функцией $\varphi(x)$ экспоненциального типа является корректной для семейства функций Ω_a для любого отрезка $P\subset R$. А именно: выберем малое число $h>0$ – шаг по y. Рассматривается явная разностная схема наиболее общего вида $u(x,y+h)=L\,u(x,y)$, где оператор L действует по x и записывается в виде

$$L\psi(x)=\sum_{k=1}^{m}a_k\psi(x+b_kh).\quad (12)$$

Для того, чтобы такая схема аппроксимировала задачу, необходимо, чтобы коэффициенты a_k, b_k удовлетворяли тождествам, которые получаются, если при $y=0$ взять $\varphi(x)=1$ и $\varphi(x)=x$:

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=1,\ \sum_{k=1}^{m}a_kb_k=-a.\quad (13)$$

Доказывается, что этих условий достаточно для того, чтобы эта схема аппроксимировала решение задачи. Соответствующим подбором коэффициентов в (12) можно добиться того, что схема использует значения функции $\varphi(x)$ только на заданном отрезке $P\subset R$.

В разделе 3.4 – с помощью метода сеток доказано для уравнения второго порядка (7), что начальная аналитическая функция может задаваться на любом отрезке пространственной прямой, если она является функцией экспоненциального типа.

В разделе 3.5 выведены рекуррентные соотношения для формул, получающихся при алгебраических итерациях конечно-разностной формулы раздела 3.4 для аппроксимации уравнения (5), при $a < 0$:

$$U[j, k+1] = -b\, U[j-1, k] + (1+2b)\, U[j, k] - b\, U[j+1, k],$$

$$(j = -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, k = 0, 1, 2, \ldots),$$

с начальным условием

$U[j, 0] = \Phi[j]$,

где $b = a\, h_t / h_x^2$; h_t, h_x - шаги сетки по t и x соответственно.

А именно, для коэффициентов выражения

$$U[j, k+1] = \sum_{q=-k-1}^{k+1} P_{k+1,q}(b)\Phi[j+q]$$

доказано, что

$$\boldsymbol{P_{k+1,-k-1}(b) = -b\, P_{k,-k}(b),}$$

$$\boldsymbol{P_{k+1,-k}(b) = -b\, P_{k,-k+1}(b) + (1+2b)\, P_{k,-k}(b),}$$

$$\boldsymbol{P_{k+1,q}(b) = -b\, P_{k,q+1}(b) + (1+2b)\, P_{kq}(b) - b\, P_{k,q-1}(b),\ q = -k+1\ ..k-1,}$$

$$\boldsymbol{P_{k+1,k}(b) = (1+2b)\, P_{k,k}(b) - b\, P_{k,k-1}(b),}$$

$$\boldsymbol{P_{k+1,k+1}(b) = -b\, P_{k\,k}(b).}$$

В наших статьях [1], [4] были проведены некоторые расчеты, на основании которых были выдвинуты гипотезы о корректности соответствующих задач для уравнений с аналитическими данными. Некоторые из них были подтверждены в разделах 3.1-3.4. Особенностью использования метода сеток для таких задач является следующее. Хотя он в некоторых случаях дает теоретическую сходимость, как доказано в разделах 3.3 и 3.4, и, как можно предполагать, для более общих задач, он явно остается неустойчивым по отношению к вычислительной погрешности, поскольку характеристический показатель соответствующего разностного оператора остается большим единицы по модулю. Поэтому выбор слишком малого шага h даже не дает возможность довести вычисление до конца вследствие появления слишком больших по модулю чисел - переполнения. По этой же причине шаг, например, $h = \frac{1}{65}$ (в компьютере получается приближенное значение уже для x) дает существенно худшие результаты, чем шаг $h = \frac{1}{64}$.

В разделе 3.6 описаны результаты численных экспериментов, по которым были выдвинуты гипотезы, доказанные в предыдущих разделах. Показано, что для аналитических функций использование формул раздела 3.5 более эффективно, чем использование первичных конечно-разностных формул. Также приведены результаты численного эксперимента, из которого видно, что даже для достаточно гладких, но не аналитических функций начальная задача для уравнения теплопроводности с обратным временем является некорректной.

В Заключении описываются возможные приложения и направления дальнейших исследований для развития общей теории дифференциальных уравнений.

Результаты диссертации, связаные с введением понятий и определением показателей характеристичности семейств функций и функцио-нально-характеристических соотношений и уравнений, доказательства или опровержения выдвинутых гипотез могут быть использованы для развития общей теории функций и теории аналитических функций.

Введенное единое определение показателя характеристичности обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных может быть использовано для развития теории дифференциальных уравнений в целом, выяснения существенных свойств дифференциальных уравнений различных типов.

Установление классов корректных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими данными функциями в тех случаях, когда соответствующие задачи для уравнений в частных производных с непрерывными и даже сколь угодно гладкими данными функциями являются некорректными, может способствовать поиску таких задач в практических приложениях и разработке эффективных алгоритмов для их приближенного решения. Результаты численных экспериментов показывают, что классы таких дифференциальных уравнений и задач значительно шире, чем те, корректность которых строго доказана в диссертации.

Приложения содержат программы на языке pascal и графическое представление некоторых полученных результатов.

В Приложении 1 – программа, реализующая алгоритм раздела 2.2 для доказательства того, что семейство функций Ω_3 не является 7-характеристическим.

В Приложении 2 – программа, реализующая один из алгоритмов раздела 3.4.

В Приложении 3 – программа, реализующая рекуррентные формулы раздела 3.5 и алгоритм расчета по ним.

В Приложении 4 – графическое представление построения обобщенных характеристик из таких же, сколь угодно малого диаметра в разделе 2.2.

В Приложении 5 – вычисление решения дифференциального уравнения первого порядка с данными на множестве методом характеристик и методом сеток, к разделу 3.3.

В Приложении 6 – иллюстрация сходимости приближенного решения, полученного методом сеток, к точному решению, к разделу 3.5.

Список публикаций по теме диссертации:

1. Панков П.С., Сабирова Х.С. Экспериментальное исследование метода сеток для уравнений в частных производных с аналитическими исходными данными // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 32. – Бишкек: Илим, 2003. – С. 39-43.

2. Панков П.С., Матиева Г.М., Сабирова Х.С. Аксиоматическая теория характеристик и ее применение к аналитическим функциям // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 33. – Бишкек: Илим, 2004. – С. 37-42.

3. Сабирова Х.С. Конечно-разностная аппроксимация операторов дифференцирования аналитических функций в обратной начальной задаче для уравнения теплопроводности // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 33. – Бишкек: Илим, 2004. – С. 160-164.

4. Панков П.С., Сабирова Х.С. Экспериментальное исследование ме-тода сеток для аналитически нелинейных уравнений в частных производных // Труды Средневолжского математического общества. – Том 6, № 1. – 2004. – С. 289-292.

5. Панков П.С., Сабирова Х.С. Применение метода сеток к обратной начальной задаче для уравнения теплопроводности с аналитическим началь-ным условием // Тюркско-согдийский синтез и развитие проблемы культур-ного наследия: тезисы докладов Международной научной конференции сту-дентов и молодых ученых, посвященной Кыргызской государственности и 10-летию образования Кыргызско-Узбекского университета. Том 2. Тезисы по естественно-техническим и общественно-гуманитарным наукам. – Ош: КУУ, 2004. – С. 214.

6. Панков П.С., Сабирова Х.С. Корректность обратной начальной задачи для уравнения теплопроводности с аналитическими данными // Дифференциальные уравнения в частных производных и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной научной конференции (г. Ташкент, 16-19 ноября 2004). Том 1. – Ташкент, 2004. – С. 117-121.

7. Панков П.С., Сабирова Х.С. Сходимость разностных методов для уравнений в частных производных первого порядка с целым аналитическим начальным условием // International Conference on Electronics and Computer in Kyrgyzstan. – Bishkek: International Ataturk-Alatoo University, Kyrgyz-Russian Slavic University, 2004. – Pp. 55-57.

8. Панков П.С., Сабирова Х.С. Применение метода сеток к обратной начальной задаче для уравнения теплопроводности с аналитическим начальным условием // Вестник Кырг. НУ им. Ж.Баласагына: серия 3. Естественно-технические науки. - Выпуск 3. Математические науки. Инфор-матика и информационные технологии. – Бишкек: КНУ, 2005. - С. 103-106.

9. Панков П.С., Сабирова Х.С. Сходимость разностных методов для уравнений в частных производных второго порядка с целым аналитическим

начальным условием // 2nd International Conference on Electronics and Computer in Kyrgyzstan. – Bishkek: International Ataturk-Alatoo University, Kyrgyz-Russian Slavic University, 2005. – Pp. 41-45.

10. Сабирова Х.С. Корректность обратной начальной задачи для уравнения теплопроводности с аналитическим начальным условием на оси // Вестник ОшГУ: серия 3. Табигый илимдер, 2005. – Вып. 2. – С. 92-96.

11. Сабирова Х.С. Классификация дифференциальных уравнений по характеристическим свойствам их решений // Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики: тез. докл. международной научной конференции. – Алматы: КазНУ им. аль-Фараби, 2005. – С. 167.

12. Панков П.С., Сабирова Х.С. Составление функционально-характеристических уравнений с аналитическими функциями // Вестник КазНТУ им. Сатпаева, 2006. - № 5. – С. 135-141.

РЕЗЮМЕ

Сабирова Халидахан Самижановна

Берилгендери аналитикалык болгон жекече туундулуу дифференциалдуу теңдемени изилдоо физика-математикалык илимдердин кандидатынын окумуштуу даражасын алуу учун жазылган диссертация (01.01.02 – дифференциалдуу теңдемелер)

Урунттуу создор: жекече туундулуу дифференциалдуу теңдеме, аналитикалык функция, гармониялык функция, характеристика, функциялуу-характеристикалуу теңдеме, аксиомалаштыруу, классташтыруу, корректтуулук, баштапкы маселе, экспоненталуу типтеги функция, торлор усулу, кичине кадамдар усулу, жыйналуучулук.

Изилдоонун объекти: бир канча озгормолуу функциялар учун берилгендери аналитикалык функциялар болгон маселелер.

Иштин максаттары: 1) Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер учун берилгендери аналитикалык функциялар болгондо корректтуу, ал эми жылма функциялар (чексиз дифференцирленуучу) болгондо корректтуу болбогон маселелердин класстарын табуу. 2). Функциялардын тобу учун характеристикалык типтеги касиеттеринин - жазылуу формасынан коз каранды болбогон ар турдуу дифференциалдуу теңдемелердин чыгарылыштарынын айырмасын так чагылдыра турган теорияны иштеп чыгаруу.

Изилдоонун ыкмалары: функциялуу жана даражалуу катарлардын ыкмасы; мажоранта функциялардын ыкмасы; дифференциалдуу теңдемелерди айырмалуу теңдемелер аркылуу жакындаштыруу; айырмалуу теңдемелерди итерациялоо; жана томонкудой жаңы ыкмалар: характеристикаларынын аксиомалуу теориянын ыкмасы; озгормолорду ажыратуу жана теңдештируу (алмаштыруу), бир озгормо боюнча кичине кадамдоо менен башка озгормо боюнча дифференциалдоо ыкмасы.

Жаңы илимий жыйынтыктары*:* Дифференциалдуу теңдемелердин характеристикалык корсоткучтору, функционалдык-характеристикалык катыштар жана теңдемелер тушунуктору жана аныктамалары киргизилди; жонокой функциялардын жыйындысы учун ушундай корсоткучтор так эсептоолорду колдонуу менен компьютерде эсептелди; ушул аныктоонун негизинде ар турдуу типтеги теңдемелердин ортосундагы жана ар турдуу болукчо областтардагы аналитикалык коэффициенттуу жекече туундулуу дифференциалдуу теңдемелердин чыгарылыштарынын касиеттеринин ортосундагы принциптуу айырмачылыктар байкалды; берилгендери аналитикалык болгон жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер учун, алардын ичинде: жылуулук откорумдуулук теңдемеси учун убактысы артка жургон баштапкы маселенин жана берилгендери убакыттык туздо болгон маселелелердин; биринчи жана экинчи тартиптеги теңдемелер учун берилгендери мейкиндиктик туздун каалаган кесиндисинде болгон маселелердин; эллиптикалык типтеги теңдеме учун баштапкы маселенин корректтуулук класстары табылды.

РЕЗЮМЕ

Сабирова Халидахан Самижановна

Исследование дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими данными

диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (01.01.02 – дифференциальные уравнения)

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, аналитическая функция, гармоническая функция, характеристика, функционально-характеристическое уравнение, аксиоматика, классификация, корректность, начальная задача, функция экспоненциального типа, метод сеток, метод малых шагов, сходимость.

Объект исследования: задачи с данными – аналитическими функциями для функций нескольких переменных.

Цели работы: 1) Найти классы задач, которые являются корректными для дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими данными, когда соответствующие задачи с гладкими (бесконечно дифференцируемыми) функциями являются некорректными. 2) Разработать теорию, которая строго отражала бы разницу свойств типа характеристических для семейств функций – решений различных дифференциальных уравнений, независимо от форм записи самих уравнений.

Методы исследования: метод функциональных и степенных рядов; метод мажорантных функций; аппроксимация дифференциальных уравнений разностными уравнениями; итерации разностных уравнений; и новые методы: метод аксиоматической теории характеристик, включающий: расщепление и отождествление переменных, дифференцирование и композицию функционально-характеристических соотношений; метод малых шагов по одной из переменных вместе с дифференцированием по другой переменной.

Новые научные результаты: Введены понятия и определение показателя характеристичности дифференциальных уравнений, семейств функций и функционально-характеристического соотношения и уравнения; вычислены такие показатели для простейших семейств функций, в том числе с использованием точных вычислений на компьютере; на основе этого определения выявлены принципиальные различия между различными типами уравнений и между свойствами решений дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами в различных подобластях; установлены классы корректных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими данными, в том числе: начальной задачи с обратным временем и задачи с данными на временной прямой для уравнения теплопроводности; задачи с данными на любом отрезке пространственной прямой для уравнений первого и второго порядка; начальной задачи для уравнения эллиптического типа.

RESUME

Sabirova Khalidakhan Samijanovna

Investigation of partial differential equations with analytical data

Dissertation for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences (01.01.02 – differential equations)

Keywords: partial differential equation, analytical function, harmonic function, characteristics, functional-characteristical equation, axiomatic, classification, correctness, initial value problem, function of exponential type, method of grids, method of small steps, convergence.

Subject of investigation: problems with data being analytical functions for functions of several variables.

Aims of investigation: 1) Find classes of tasks being correct for problems with analytical data for partial differential equations if corresponding tasks for data being smooth (infinitely differentiable) functions are not correct. 2) Develop a theory strictly performing peculiarities of properties of characteristic type for families of functions being solutions of differential equations and not depending on forms of presentation of equations themselves.

Methods of investigation: method of functional and power series; method of majorant functions; approximation of differential equations by difference ones; iterations of difference equations; and new methods: method of axiomatic theory of characteristics including: splitting and identifying of variables, differentiation and compositions of functional-characteristical assertions; method of small steps by one of variables with differentiation by other variable.

New scientific results: The notion and definition of index of characteristicity of differential equations and families of functions and functional-characteristical assertion and equation are introduced; such indexes are evaluated (including exact calculations on a computer) for the simplest families of functions; on the base of this definition, principal differences between various types of equations and between properties of solutions of partial differential equations with analytical data in various domains; there are detected classes of correct problems for partial differential equations with analytical data including: the initial value problem with reverse time and the problem with data on temporal line for the heat equation; problems with data on any segment of spatial line for equations of the first and second order; the initial value problem for the equation of elliptical type.

Подписано в печать 6.04.2007 г. Формат 60 x 84 $^{1}/_{16}$

Офсетная печать. Объем – 1,25 п.л.

Тираж 100 экз. Заказ 48

Издательство ОсОО ПТФ “Квант”

г.Бишкек