НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ Д 01.07.362

На правах рукописи

АШИРБАЕВ БЕЙШЕМБЕК ЫБЫШЕВИЧ

УДК 517. 928 + 977

ОПЕРАТОР ГРАМА В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ И В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

БИШКЕК – 2008

Работа выполнена в Государственном университете строительства, транспорта и архитектуры

Научный руководитель: кандидат технических наук, доцент **З.К. Иманалиев** (Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова)

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **А. Асанов** (Кыргызско-Турецкий университет «Манас»)

доктор физико-математических наук, профессор **Б.Е. Кангужин** (Казахский Национальный университет им. аль-Фараби)

Ведущая организация: **Кыргызский Национальный университет им. Ж. Баласагына** – Кыргызстан, 720033, г.Бишкек, ул Фрунзе 547

Защита диссертации состоится 17 июня 2008 г., в 16.00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.07.362 на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики, по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй 265-а.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики, по адресу: Кыргызстан, 720071,
г. Бишкек, проспект Чуй 265-а.

Автореферат разослан «____»___________2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., с.н.с. **С. Искандаров**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Развитие управляемых систем, вызванное запросами практики и потребностями современной техники, определило круг задач, которые составили исследования математической теории оптимальных процессов. Существенное место в этой теории занимают задачи оптимального управления описываемые дифференциальными уравнениями с сингулярными возмущениями.

Для исследования таких задач применяются асимптотические методы, которые позволяют установить соответствие между точной (возмущенной) и упрощенной (невозмущенной, вырожденной) моделями, и на этой основе разработались алгоритмы приближенного решения исходных задач оптимального управления.

В трудах А.Б. Васильевой, Н.Х. Багировой, М.И. Иманалиева, P.V. Kokotovic, R.A. Jackel, P. Sannuti, В.Я.Глизера, М.Г.Дмитриева, Е.И.Геращенко, С.М.Геращенко, Б.В.Викторова создано научное направление: исследование задач оптимального управления асимптотическими методами теории сингулярных возмущений.

Теория сингулярных возмущений в задачах оптимального управления получила развитие в исследованиях А.Л. Дончева, Т.Р. Гичева, M.L. Freedman, B. Gronoff, V. Dragan, A. Halanay, A.H. Haddad, C.F. Kung, С.Г. Крейна, Г.А. Курина, Ж.Ш. Шаршеналиева, З.К. Иманалиева, А. Саадабаева, М.К Калманбетова и других.

В данной теории задачи можно объединить в две группы. Первая – задача с фиксированными конечными состояниями системы, или «терминальная» задача. Вторая – задачи со свободными конечными состояниями системы, или «свободная» задача.

Терминальные задачи в регулярно возмущенных системах рассмотрены в работах Ю.Н. Андреева, А.И. Егорова, В.И. Зубова, Н.Н. Красовского, У. Портера, Я.Н. Ройтенберга и других. Анализ литературы показал, что для сингулярно-возмущенных систем такие задачи ранее не рассматривались.

Асимптотическое решение сингулярно-возмущенной «свободной» задачи может быть получено двумя подходами.

Первый подход, основанный на рассмотрении краевой задачи принципа максимума, использован в работах М.Г. Дмитриева, A.H. Haddad, P.V. Kokotovic, P. Sannuti и других. Такая методика позволяет получать решения задач с открытой областью управления, т.е. задач классического вариационного типа. В задачах с замкнутой областью управления возникают трудности, связанные с динамическими уравнениями краевой задачи принципа максимума.

В работах В.Я. Глизера, М.Г. Дмитриева, V. Dragan, A. Halanay, P.V. Kokotovic, R.A. Jackel и других использован второй подход, основанный на рассмотрении матричного дифференциального уравнения Риккати соответствующего исходной задачи. Однако нелинейность такого уравнения и неразделенность переменных в этом уравнении создает определенные трудности. Поэтому можно отметить, что теория сингулярных возмущений в задачах оптимального управления остается до конца не разработанной.

В данной диссертационной работе исследованы задачи оптимального управления с сингулярными возмущениями на основе совместного использования методов пространства состояний и разделения движений.

Таким образом актуальность данной темы диссертационного исследования обусловлена:

- теоретической ценностью и практической целесообразностью исследования сингулярно-возмущенных уравнений на основе метода пространства состояний и метода разделения движений;

- неисследованностью сингулярно-возмущенных терминальных задач и важностью исследования сингулярно-возмущенных свободных задач оптимального управления.

Цель данной диссертационной работы состоит в развитии метода пространства состояний в теории сингулярно-возмущенных уравнений и в задачах оптимального управления, а также в разработке аналитических алгоритмов для решения сингулярно-возмущенных задач оптимального управления, на основе совместного использования методов пространства состояний и разделения движений.

Методология и методы исследования. В процессе исследования использованы теории: сингулярных возмущений, оптимального управления, устойчивости, и методы пространства состояний и разделения движений.

Научная новизна полученных результатов:

- предложен способ декомпозиции медленных и быстрых координат и получена формула переходной матрицы, которая позволяет разделить вектор переменных состояния исходной системы на медленные и быстрые подвекторы, а также построена переходная матрица линейной сингулярно возмущенной системы;

- на основе свойств оператора Грама и метода разделения движений: выведен критерий управляемости, действующий в соответствующих векторных пространствах медленных и быстрых переменных состояния и для управляемой стационарной системы с медленными и быстрыми движениями сконструирован линейный регулятор, состоящий из двух подрегуляторов, которые обеспечивают перевод системы из любой точки пространства в начало координат;

- предложен асимптотический способ вычисления значения функционала, характеризующего величину среднеквадратического отклонения траектории движения управляемой системы от устойчивого равновесия;

- построены алгоритмы решения линейной и квазилинейной сингулярно возмущенной терминальной задачи;

- разработан асимптотический способ для решения сингулярно-возмущенной свободной задачи;

- предложен способ декомпозиции на интегральных многообразиях для сингулярно возмущенной свободной задачи.

Практическая значимость полученных результатов.

Результаты работы расширяют возможности применения методов пространства состояний и разделения движений в теории сингулярно-возмущенных уравнений и асимптотического построения решений задач оптимального управления с сингулярными возмущениями. Задачи, исследованные в диссертации, являются математическими моделями ряда практических проблем принятия решений в конкретных технических системах, а также могут применяться в разработке спецкурсов математической теории оптимального управления.

Основные положения, выносимые на защиту:

- способ декомпозиции медленных и быстрых координат и алгоритм построения переходной матрицы для линейной сингулярно возмущенной системы;
- критерий управляемости для линейной сингулярно возмущенной управляемой системы;
- алгоритм вычисления значения функционала, характеризующего величину среднеквадратического отклонения траектории движения управляемой сингулярно возмущенной системы от устойчивого равновесия;
- алгоритмы решения линейной и квазилинейной сингулярно возмущенной терминальной задачи оптимального управления;
- алгоритмы асимптотического решения сингулярно возмущенной свободной задачи оптимального управления.

Апробация результатов диссертации.

Основные результаты диссертации докладывались на международных научных конференциях:

- «Технологии и перспективы современного инженерного образования, науки и производства», посв. 45-летию организации ФПИ – КТУ им. И.Раззакова. – Бишкек, 1999;
- «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике». КГНУ им. Ж.Баласагына. Бишкек, 2001;
- «Современные технологии и управление качеством в образовании, науке и производстве: опыт адаптации и внедрения». КТУ им. И.Раззакова, Бишкек, 2001;
- «Наука и инновационные образовательные технологии в вузе» посв. 80-летию КНУ им.Ж.Баласагына и 10-летию ИИМОП. Бишкек, 2006;
- «Инновации в образовании, науке и технике» посв. 100-летию первого ректора КГТУ им. И.Раззакова, проф. Сухомлинова Г.А. Бишкек, 2006;
- научно-практич. конф. «Физика и физическое образование» посв. 70-летию факультета физики и электроники. КНУ им Ж. Баласагына. Бишкек, 2003;
- респуб. конф. «Проблемы прикладной математики, механики и инженерного образования» посв. 50-летию КНТУ им. И. Раззакова. – Бишкек, 2005;
- научно-методических семинарах кафедры «Прикладная математика и информатика» Кыргызского государственного университета строительства,

транспорта и архитектуры и «Прикладная математика» Кыргызского государственного технического университета им.И.Раззакова.

Опубликованность результатов. По теме диссертации опубликовано 23 работ, в том числе 8 статей в материалах конференций различных уровней, 15 статей в отечественных журналах и 1 статья в Вестнике Каз.НУ им. аль-Фараби. В работах [1-6, 8-11, 14-17,19-23] постановка задачи принадлежит научному руководителю Иманалиева З.К. Вклады Бараковой Ж.Т. в статье [8] – вычисление примера экономического содержания, а в [3,5,14] – обсуждение результатов, Пахырова З.П. в [5], Апышева Ж.А. в [1], Тологонова К.Т. в [2] – обсуждение результатов. Выбор метода исследования, построение алгоритмов, а также все проведенные расчеты и составление программ на языке Delphi для реализации расчетов, проводились лично соискателем.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, состоящих из 8 параграфов, заключения и приложений. Список использованной литературы состоит из 127 наименований. Объем основного текста 138 страниц.

В автореферате соблюдена система нумерации, принятая внутри каждой главы в виде (а, в), где а – номер главы, в – порядковый номер внутри главы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обоснование актуальности темы диссертации, обзор основных методов исследования по теории оптимального управления с сингулярными возмущениями.

Первая глава посвящена обзору работ, связанных с изучением задач оптимального управления методами теории сингулярных возмущений. Приведены основные известные результаты, которые используются в данной работе.

В §2.1 сформулированы следующие задачи:

ЗАДАЧА 2.1. («Терминальная» задача). Пусть управляемый процесс описывается системой

$$\dot{x}(t,\mu) = A_1(t)x(t,\mu) + A_2(t)z(t,\mu) + B_1(t)u(t,\mu), \qquad (2.1)$$

$$\mu\dot{z}(t,\mu) = A_3(t)x(t,\mu) + A_4(t)z(t,\mu) + B_2(t)u(t,\mu), \qquad (2.2)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad x^0 \in R^n, \qquad z(t_0) = z^0, \quad z^0 \in R^m, \qquad (2.3)$$

$$x(t_1) = x^1, \quad x^1 \in R^n, \qquad z(t_1) = z^1, \quad z^1 \in R^m, \qquad (2.4)$$

где $A_1(t)-(n\times n)$, $A_2(t)-(n\times m)$, $A_3(t)-(m\times n)$, $A_4(t)-(m\times m)$, $B_1(t)-(n\times r)$, $B_2(t)-(m\times r)$ – непрерывные матрицы, $u(t,\mu)\in R^r$ – управляющая вектор-функция.

В дальнейшем везде $\mu > 0$ – малый параметр. Предположим, что

I. $\{A_1(t),\, A_2(t),\, A_3(t),\, A_4(t),\, B_1(t),\, B_2(t)\} \in C^n[t_0,t_1]$.

II. $\operatorname{Re}\lambda_i(A_4(t)) < 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad t_0 \le t \le t_1).$ (2.5)

При $\mu = 0$ из (2.1) и (2.2) получаем *вырожденную* систему:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A_0(t)\bar{x}(t) + B_0(t)\bar{u}(t), \quad \bar{x}(t_0) = x^0, \ \bar{z}(t) = -A_4^{-1}(t)A_3(t)\bar{x}(t) - A_4^{-1}(t)B_2(t)\bar{u}(t), \qquad (2.6)$$

где $A_0(t)=A_1(t)-A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad B_0(t)=B_1(t)-A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t)$. (2.7)

III. Пусть матрицы $A_0(t), \quad B_0(t)\in C^{(n-1)}[t_0,t_1]$ и

$\exists\ t_*\in[t_0,t_1]\ (rank\{L_1(t),\ldots,L_n(t)\}=n)$, (2.8)

где $L_1(t)=B_0(t), \quad L_k(t)=A_0L_{k-1}(t)-\dot{L}_{k-1}(t), \quad (k=2,\ldots,n)$. (2.9)

Тогда система (2.6) управляема на отрезке $[t_0,t_1]$ (Красовский Н.Н., 1968).

IV. Если система (2.6) управляема и выполняется условие (2.5), тогда система (2.1) управляема по x при $\mu\ll 1$ (Дончев А.Л., Гичев Т.Р., 1977).

V. Если выполняются условия III, IV и

$$rank\,[B_2(t_0),\ A_4(t_0)B_2(t_0),\ \ldots,\ A_4^{m-1}(t_0)B_2(t_0)]=m, \tag{2.10}$$

то система (2.2) управляема по z при $\mu\ll 1$ (Дончев А.Л., Гичев Т.Р., 1977).

При выполнении условий I – V требуется построить оптимальное управление $u(t,\mu)$, переводящее систему (2.1), (2.2) из начального состояния (2.3) в конечное состояние (2.4), чтобы при этом функционал

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_1}u'(t,\mu)u(t,\mu)dt\to\min. \tag{2.11}$$

ЗАДАЧА 2.2. («Свободная» задача). Пусть требуется найти $u(t,\mu)\in R^r$:

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_1}u'(t,\mu)S(t)u(t,\mu)dt+y'(t_1)Fy(t_1)\to\min \tag{2.12}$$

на траекториях системы (2.1) – (2.3), где $F=\begin{pmatrix}F_1 & F_2\\ F_2' & F_3\end{pmatrix}$ – постоянная положительно определенная матрица, $S(t)$ – $(r\times r)$ – положительно определенная непрерывная матрица.

§2.2 посвящен разделению движений и построению переходной матрицы системы (2.1) – (2.4). Доказаны следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполняются условия I, II задачи 2.1 и матричные функции $P=P(t,\mu), \quad Q=Q(t,\mu)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\mu\dot{P}+\mu P\widetilde{A}_1(P)=A_3+A_4P, \qquad \mu\dot{Q}-\mu\widetilde{A}_1(P)Q=-A_2-Q\widetilde{A}_4(P), \tag{2.13}$$

где $\widetilde{A}_1(P)=\widetilde{A}_1(t,\mu)=A_1(t)+A_2(t)P(t,\mu), \qquad \widetilde{A}_4(P)=\widetilde{A}_4(t,\mu)=A_4(t)-\mu P(t,\mu)A_2(t)$. (2.14)

Тогда система:

$$\dot{\widetilde{x}}(t,\mu)=\widetilde{A}_1(P)\widetilde{x}(t,\mu)+\widetilde{B}_1(P,Q)u(t), \qquad \widetilde{x}(t_0)=\widetilde{x}^0, \quad \widetilde{x}(t_1)=x^1, \tag{2.15}$$

$$\mu\dot{\widetilde{z}}(t,\mu)=\widetilde{A}_4(P)\widetilde{z}(t,\mu)+\widetilde{B}_2(P)u(t), \qquad \widetilde{z}(t_0)=\widetilde{z}^0, \quad \widetilde{z}(t_1)=\widetilde{z}^1, \tag{2.16}$$

$\widetilde{B}_1(P,Q)=\widetilde{B}_1(t,\mu)=B_1(t)+Q(t,\mu)\widetilde{B}_2(t,\mu), \qquad \widetilde{B}_2(P)=\widetilde{B}_2(t,\mu)=B_2(t)-\mu P(t,\mu)B_1(t)$, (2.17)

$\widetilde{x}^i=x^i+\mu Q(t_i)\widetilde{z}^i$, $\quad \widetilde{z}^i=z^i-P(t_i)x^i$, $\quad i=0,\ 1$, эквивалентна системе (2.1) – (2.4).

Подсистемы (2.15) и (2.16) соответственно называются медленной и быстрой. Здесь декомпозиция медленных и быстрых координат системы (2.1) – (2.4) произведена путем замены переменных:

$$z(t,\mu)=\widetilde{z}(t,\mu)+Px(t,\mu), \quad x(t,\mu)=\widetilde{x}(t,\mu)-\mu Q\widetilde{z}(t,\mu) \tag{2.18}$$

ТЕОРЕМА 2.2. Если $\Phi_*(t,t_0)$ – переходная матрица для уравнения $\dot{p}(t)=-A_1'(t)p(t)$, а $\Psi(t,t_0,\mu)$ – для уравнения $\mu\dot{z}(t,\mu)=A_4(t)z(t,\mu)$, то решение первого уравнения (2.13) с начальным условием $P(t_0)=P_0,\ \ P_0\in G,\ \ G\subset R^{m\times n}$ при $\mu<<1$ существует и единственно.

ТЕОРЕМА 2.3. Если определить скалярное произведение матриц $\overline{P}(t,\mu)$ и $\overline{Q}(t,\mu)$ в виде $\left(\overline{P},\overline{Q}\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{h}_{ij}\overline{n}_{ji}=Sp(\overline{P}\cdot\overline{Q})$, то уравнение $\mu\dot{\overline{Q}}=\mu A_1(t)\overline{Q}-\overline{Q}A_4(t)$, $\overline{Q}=\overline{Q}(t,\mu),\ \ t\in[t_0,t_1],\ \ \overline{Q}\in R^{n\times m}$, будет сопряженным к уравнению $\mu\dot{\overline{P}}=-\mu\overline{P}A_1(t)+A_4(t)\overline{P}$, $\overline{P}=\overline{P}(t,\mu),\ \ t\in[t_0,t_1],\ \ \overline{P}\in R^{m\times n}$.

В этом же параграфе предложен способ построения переходной матрицы системы

$$\dot{y}(t,\mu)=A(t,\mu)y(t,\mu),\ y(t_i)=y^i, \tag{2.19}$$

где $$A(t,\mu)=\begin{pmatrix}A_1(t) & A_2(t)\\ (1/\mu)A_3(t) & (1/\mu)A_4(t)\end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

$y^i=col\left(x^i,z^i\right),\ \ i=0,1$ – заданные вектора, $y(t,\mu)=col\left(x(t,\mu),z(t,\mu)\right)$.

В результате чего установлено нулевое приближение переходной матрицы $Y(t,t_0,\mu)$ системы (2.19)

$$Y_0(t,t_0,\mu)=\begin{pmatrix}\exp\left(\int_{t_0}^{t}A_0(s)ds\right) & 0\\ -A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}A_0(s)ds\right)+\exp\left(A_4(t_0)\dfrac{t-t_0}{\mu}\right)A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0) & \exp\left(A_4(t_0)\dfrac{t-t_0}{\mu}\right)\end{pmatrix},$$

что является переходной матрицей системы

$\dot{\overline{x}}(t)=A_0(t)\overline{x}(t),\ \ \overline{x}(t_0)=x^0$, $\mu\dot{\widetilde{z}}(t)=A_4(t_0)\widetilde{z}(t)$, $\widetilde{z}(t_0)=A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x^0+z^0=\widetilde{z}^0$.

В этом же параграфе получена формула переходной матрицы, которая позволяет разделить вектор состояния системы (2.1) – (2.4) на медленные и быстрые подвекторы. Найдены условия, при выполнении которых собственные значения матриц системы с разделенными движениями остаются «близкими» (в смысле отрицательности их вещественных частей) к собственным значениям матриц той системы, которая является асимптотической к системе (2.1) – (2.4) с точностью $O(\mu)$:

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть матрицы $\Phi(t,t_0,\mu)$ и $\Psi(t,t_0,\mu)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{\Phi}(t,t_0,\mu)=\widetilde{A}_1(t,\mu)\Phi(t,t_0,\mu),\qquad \Phi(t_0,t_0,\mu)=E_n, \tag{2.21}$$

$$\mu\dot{\Psi}(t,t_0,\mu)=\widetilde{A}_4(t,\mu)\Psi(t,t_0,\mu),\qquad \Psi(t_0,t_0,\mu)=E_m. \tag{2.22}$$

Тогда переходную матрицу $Y(t,t_0,\mu)$ системы (2.19) можно представить в виде

$$Y(t,t_0,\mu)=M(t,\mu)G(t,t_0,\mu)M^{-1}(t_0,\mu), \tag{2.23}$$

где $$G(t,t_0,\mu)=diag\left(\Phi(t,t_0,\mu),\ \ \Psi(t,t_0,\mu)\right), \tag{2.24}$$

$$M(t,\mu)=\begin{pmatrix}E_n & -\mu Q\\ P & E_m-\mu PQ\end{pmatrix},\qquad M^{-1}(t,\mu)=\begin{pmatrix}E_n-\mu QP & \mu Q\\ -P & E_m\end{pmatrix}.$$

Матрицы $\Phi(t,t_0,\mu)$ и $\Psi(t,t_0,\mu)$ будем называть переходными матрицами медленной и быстрой подсистем системы (2.19).

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $A_0(t),\ A_4(t)$ – устойчивые матрицы, а соответствующие к ним переходные матрицы подчиняются неравенствам

$$\left\|\overline{\Phi}(t,t_0)\right\| \le c\exp(-m(t-t_0)),\ \left\|\overline{\Psi}(t,t_0,\mu)\right\| \le c\exp(-\gamma(t-t_0)/\mu). \qquad (2.25)$$

Тогда при m>1, $\mu << 1$ и $t_0 \le t \le t_1$ собственные значения матриц $\widetilde{A}_1(t,\mu), \widetilde{A}_4(t,\mu)$ будут «близкими» к собственным значениям матриц $A_0(t), A_4(t),$ и будут отрицательными в смысле отрицательности их вещественных частей. При этом имеют место оценки:

$$\left\|\Phi(t,t_0,\mu)\right\| \le c\exp(-m(t-t_0)),\ \left\|\Psi(t,t_0,\mu)\right\| \le c\exp(-\gamma(t-t_0)/\mu). \qquad (2.26)$$

где $m_1 = m-1$, $\gamma_1 = \gamma - \mu d_1 c,\ c,m,\gamma$ – положительные постоянные, $\overline{\Phi}(t,t_0), \overline{\Psi}(t,t_0,\mu)$ – переходные матрицы медленных и быстрых подсистем системы

$$\dot{\overline{x}} = A_0(t)\overline{x} + B_0(t)\overline{u},\ \ \overline{x}(t_0) = \overline{x}^0,\ \ \overline{x}(t_1) = \overline{x}^1, \qquad (2.27)$$

$$\mu\dot{\overline{z}}_* = A_4(t)\overline{z}_* + B_2(t)\overline{u},\ \ \overline{z}_*(t_0) = \overline{z}_*^0,\ \ \overline{z}_*(t_1) = \overline{z}_*^1,\ \ \dot{z}_* = \overline{z} + A_4^{-1}A_3\overline{x}.$$

В §2.3 исследована управляемость системы

$$\dot{y}(t,\mu) = A(t,\mu)y(t,\mu) + B(t,\mu)u(t), \qquad (2.28)$$

где $A(t,\mu)$ определяется из (2.20),

$$B(t,\mu) = col(B_1(t), (1/\mu)B_2(t)) \qquad (2.29)$$

и выведен критерий управляемости системы (2.28):

ТЕОРЕМА 2.6. Для системы (2.28) тогда и только тогда существует управление $u(t,\mu)$, которое переводит эту систему из начального состояния

$$y(t_0) = y^0, \qquad (2.30)$$

в конечное состояние $y(t_1) = y^1$, (2.31)

когда векторы $\overline{c}_1 = x^1 - \overline{\Phi}(t_1,t_0)x^0$, $\overline{c}_2^* = \overline{c}_2 - \overline{W}_2'(t_1,t_0)\alpha_1$, $\overline{c}_2 = z^1 + A_4^{-1}(t_1)A_3(t_1)x^1$ (2.32)

принадлежат области значений операторов Грама:

$$\overline{W}_1(t_1,t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \overline{\Phi}(t_1,s)B_0(s)B_0'(s)\overline{\Phi}'(t_1,s)ds, \qquad (2.33)$$

$\overline{W}_3(t_1,t_0) = \int_0^{\infty} \exp(A_4(t_1)\lambda)B_2(t_1)B_2'(t_1)\exp(A_4'(t_1)\lambda)d\lambda$, соответственно,

где $\lambda = (t_1 - t)/\mu$, $\overline{W}_2(t_1,t_0) = -B_0(t_1)B_2'(t_1)A_4'^{-1}(t_1)$, $\overline{\Phi}(t_1,t_0)$ и $\exp(A_4(t_1)\lambda)$ – переходные матрицы медленной и быстрой подсистем системы

$$\dot{\overline{x}}(t) = A_0(t)\overline{x}(t) + B_0(t)u(t),\quad \overline{x}(t_0) = x^0,\quad \overline{x}(t_1) = x^1, \qquad (2.34)$$

$$\mu\dot{\widetilde{z}}(t,\mu) = A_4(t)\widetilde{z}(t,\mu) + B_2(t)u(t),\quad \widetilde{z}(t_0) = \widetilde{z}^0,\quad \widetilde{z}(t_1) = \widetilde{z}^1,\ \ \widetilde{z} = \overline{z} + A_4^{-1}(t)A_3(t)\overline{x}.$$

Кроме того, если α_1^* и β^* – решения уравнений:

$$\overline{W}_1(t_1,t_0)\cdot\alpha_1 = \overline{c}_1,\ \overline{W}_3(t_1,t_0)\cdot\beta = \overline{c}^*{}_2, \qquad (2.35)$$

то управление

$$u_0(t,\mu) = \begin{cases} B_0'(t)(t_1,t)\alpha_1^*, & t_0 \le t \le t_1, \\ B_2'(t_1)\exp(A_4'(t_1)\lambda)\beta^*, & 0 \le \lambda \le \lambda_1 < +\infty, \quad \lambda_1 = (t_1 - t_0)/\mu. \end{cases} \qquad (2.36)$$

обеспечивает указанный переход.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если матрицы (2.33) имеют максимальные ранги, то система (2.28) управляема.

Установлено, что для управляемого стационарного объекта с сингулярными возмущениями, можно сконструировать линейный регулятор, состоящий из двух подрегуляторов, которые обеспечивают перевод этого объекта из любой точки пространства в начало координат:

ТЕОРЕМА 2.7. В стационарной управляемой системе

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_1\tilde{x} + \tilde{B}_1 u\,,\ \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}^0\,,\quad \tilde{x}(t_1) = \tilde{x}^1\,, \tag{2.37}$$

$$\mu\dot{\tilde{z}} = \tilde{A}_4\tilde{z} + \tilde{B}_2 u\,,\ \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}^0\,,\ \tilde{z}(t_1) = \tilde{z}^1\,,$$

где $\tilde{A}_1 = A_1 + A_2 P\,,\ \tilde{A}_4 = A_4 + \mu P A_2\,,\ \tilde{B}_1 = B_1 + Q\tilde{B}_2\,,\ \tilde{B}_2 = B_2 - \mu P B_1\,,$ (2.38)

перевод события $(t_0, y_\bullet)$ в событие $(t_1, 0)$ обеспечивается входным воздействием

$$u(t,\mu) = \begin{cases} u^*(t,\mu), & t_0 \le t \le t_1, \\ V(\lambda), & 0 \le \lambda \le \lambda_1 < \infty, \end{cases} \tag{2.39}$$

где $u^*(t,\mu) = -\tilde{B}_1'\tilde{W}_1^{-1}(t,t_1\mu)x(t)\,,\qquad V(\lambda) = -\tilde{B}_2'\tilde{W}_3^{-1}(t,t_1\mu)z_*(t)\,,$

$$y_* = col\left(x,\, z_*\right),\quad z_*(t) = \tilde{z}(t) + \tilde{A}_4^{-1}\tilde{B}_2\left(-\tilde{B}_1{}'\tilde{W}_1^{-1}(t,t_1,\mu)x\right),$$

$$\tilde{W}_1(t,t_1,\mu) = \int_t^{t_1} \exp\left(\tilde{A}_1(t-s)\right)\tilde{B}_1\tilde{B}'\exp\left(\tilde{A}_1'(t-s)\right)_1 ds\,,$$

$$\tilde{W}_3(t,t_1,\mu) = \frac{1}{\mu}\int_t^{t_1} \exp\left(\tilde{A}_4((t-s)/\mu)\right)\tilde{B}_2\tilde{B}_2{}'\exp\left(\tilde{A}_4'((t-s)/\mu)\right)ds\,.$$

В §2.4 исследована задача оценки среднеквадратического отклонения движения сингулярно возмущенной системы (2.19).

Рассмотрим квадратичный функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} y'(t)D(t)y(t)dt\,,\qquad D(t) = \begin{pmatrix} D_1(t) & D_2(t) \\ D_2'(t) & D_3(t) \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Пусть матрицы $\Phi(t,t_0,\mu)$ и $\Psi(t,t_0,\mu)$ являются переходными матрицами однородных систем

$$\dot{\tilde{x}}(t,\mu) = \tilde{A}_1(t,\mu)\tilde{x}(t,\mu)\,,\ \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}^0\,,\ \mu\dot{\tilde{z}}(t,\mu) = \tilde{A}_4(t,\mu)\tilde{z}(t,\mu)\ \ \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}^0 \tag{2.41}$$

В силу уравнения движения

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t,t_{o,}\mu)\tilde{x}(t_0)\,,\qquad \tilde{z}(t) = \Psi(t,t_0,\mu)\tilde{z}(t_0) \tag{2.42}$$

имеем $J = \int_{t_0}^{t} \tilde{y}'(t_0)G'(t,t_{0,}\mu)\tilde{D}(t)G(t,t_0,\mu)\tilde{y}(t_0)dt = \tilde{y}'(t_0)V(t_0,t_1,\mu)\tilde{y}(t_0),$ (2.43)

где $\tilde{y}(t_0) = col\left(\tilde{x}(t_0),\, \tilde{z}(t_0)\right),\ V(t_0,t_1,\mu) = \int_{t_0}^{t_1} G'(t,t_0,\mu)\tilde{D}(t,\mu)G(t,t_0,\mu)dt\,,$ (2.44)

$$\tilde{D}(t,\mu) = M'(t,\mu)D(t,\mu)M(t,\mu) = \begin{pmatrix} \tilde{D}_1(t,\mu) & \tilde{D}_2(t,\mu) \\ \tilde{D}_2'(t,\mu) & \tilde{D}_3(t,\mu) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{D}_1(t,\mu) = D_1(t) + P'(t,\mu)D_2(t) + D_2(t)P(t,\mu) + P'(t,\mu)D_3(t)P(t,\mu),$$

$$\tilde{D}_2(t,\mu) = -\mu\tilde{D}_1(t,\mu)Q(t,\mu) + D_2(t) + P'(t,\mu)D_3(t),$$

$$\tilde{D}_3(t,\mu) = D_2(t) - \mu\tilde{D}_2'(t,\mu)Q(t,\mu) - \mu Q'(t,\mu)\tilde{D}_2'(t,\mu) + \mu^2 Q'(t,\mu)\tilde{D}_1(t,\mu)Q(t,\mu).$$

Таким образом, искомая величина (2.43) является квадратичной формой от $\widetilde{y}(t_0)$, а $V(t_0,t_1,\mu)$ – ее матрицей. Если будут известны переходные матрицы $\Phi(t,t_0,\mu)$, $\Psi(t,t_0,\mu)$, то матрицу $V(t_0,t_1,\mu)$ можно вычислить с помощью формулы (2.44) . В данной работе показан и другой способ вычисления. В (2.44) заменяем t_0 на t и дифференцируем:

$$\dot{V}(t,t_1,\mu) = -\widetilde{A}'(t,\mu)V(t,t_1,\mu) - V(t,t_1,\mu)\widetilde{A}(t,\mu) - \widetilde{D}(t,\mu). \qquad (2.45)$$

где $\widetilde{A}(t,\mu) = diag\left(\widetilde{A}_1(t,\mu), (1/\mu)\widetilde{A}_4(t,\mu)\right).$ (2.46)

ТЕОРЕМА 2.8. Если блоки матрицы $V = \begin{pmatrix} V_1 & \mu V_2 \\ \mu V_2' & \mu V_3 \end{pmatrix}$ являются решениями

$$\dot{V}_1(t) = -\widetilde{A}_1'(t,\mu)V_1(t) - V_1(t)\widetilde{A}_1(t,\mu) - \widetilde{D}_1(t,\mu), \qquad V_1(t_1,t_1) = 0\,, \qquad (2.47)$$
$$\mu\dot{V}_2(t) = -\mu\widetilde{A}_1'(t,\mu)V_2(t) - V_2(t)\widetilde{A}_4(t,\mu) - \widetilde{D}_2(t,\mu),\ V_2(t_1,t_1) = 0\,,$$
$$\mu\dot{V}_3(t) = -\widetilde{A}_4'(t,\mu)V_3(t) - V_3(t)\widetilde{A}_4(t,\mu) - \widetilde{D}_3(t,\mu),\ V_3(t_1,t_1) = 0\,,$$

а $\widetilde{x}(t)$, $\widetilde{z}(t)$ – решения (2.41) при $t_0 \le t \le t_1$, то

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{y}'(t)\widetilde{D}(t)\widetilde{y}(t)dt = \widetilde{y}'(t_0)V(t_0,t_1,\mu)\widetilde{y}(t_0), \qquad (2.48)$$

Предельная задача (при $\mu \to 0$) для (2.47) имеет вид:

$$\dot{\overline{V}}_1(t) = -\overline{A}_0(t)\overline{V}_1(t) - \overline{V}_1(t)\overline{A}_0(t) - \overline{D}_1(t), \quad \overline{V}_1(t_1,t_1) = 0, \qquad (2.49)$$
$$0 = -\overline{V}_2(t)A_4(t) - \overline{D}_2(t), \quad 0 = -A_4'(t)\overline{V}_3(t) - \overline{V}_3(t)A_4(t) - \overline{D}_3(t),$$

где $\overline{A}_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $\overline{D}_1(t) = D_1(t) + P_0'(t)D_2'(t) + D_2(t)P_0(t) + P_0'(t)D_3(t)P_0(t)$, $\overline{D}_2(t) = D_2(t) + P_0'(t)D_3(t)$, $\overline{D}_3(t) = D_3(t)$, $P_0(t) = -A_4^{-1}(t)A_3(t)$.

Построим приближенного решения системы (2.47). Для этого используем решения «систем быстрых движений»:

$$\frac{d\widetilde{V}_2}{d\sigma} = -\mu\overline{A}_1'\widetilde{V}_2 - \widetilde{V}_2A_4 - \overline{D}_2,\ \widetilde{V}_2(0) = 0,\ \frac{d\widetilde{V}_3}{d\sigma} = -A_4'\widetilde{V}_3 - \widetilde{V}_3A_4 - \overline{D}_3,\ \widetilde{V}_3(0) = 0, \qquad (2.50)$$

где $\overline{A}_1 = \overline{A}_1(t_1) \approx \widetilde{A}_1(t_1 + \sigma\mu)$, $A_4(t_1+\sigma\mu) \approx A_4(t_1) = A_4$, $\overline{D}_i(t_1+\sigma\mu) \approx \overline{D}_i(t_1) = \overline{D}_i$, $i = 2,\ 3$, $\sigma = -\lambda = (t - t_1)/\mu$. Решения уравнения (2.50), удовлетворяющие нулевым начальным условиям, имеют вид:

$$\widetilde{V}_2(\sigma) = \int_{\sigma}^{0} \exp\left(-\mu\overline{A}_1'(\sigma - s)\right)\overline{D}_2 \exp\left(-A_4(\sigma - s)\right)ds, \qquad (2.51)$$
$$\widetilde{V}_3(\sigma) = \int_{\sigma}^{0} \exp\left(-A_4'(\sigma - s)\right)\overline{D}_3 \exp\left(-A_4(\sigma - s)\right)ds.$$

ТЕОРЕМА 2.9. Пусть $A_4(t)$ – устойчивая матрица, функция $\widetilde{V}_3(\sigma) \to \delta_3$ при $\sigma \to -\infty$, $(\mu \to 0)$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\int_{\tau}^{0} \exp\left(A_4's\right)\overline{D}_3 \exp(A_4s)ds = \exp\left(A_4'\sigma\right)\delta_3 \exp(A_4\sigma) - \delta_3\ . \qquad (2.52)$$

где $\delta_3 = \int_{0}^{\infty} \exp\left(A_4's\right)\overline{D}_3 \exp\left(A_4s\right)ds$ решения уравнения $-A_4'\delta_3 - \delta_3A_4 - \overline{D}_3 = 0$

В §3.1 рассмотрена задача 2.1. Требуется найти управление $u = u_0(t,\mu)$ в задаче (2.11), (2.15) – (2.17). Для этого рассмотрим *асимптотическую систему* (2.34) и получаем следующие решения для задач (2.11), (2.34):

$$\overline{u}^*(t) = B_0'(t)\overline{\Phi}'(t_1,t)W^{-1}(t_1,t_0)\alpha_1, \qquad (3.1)$$

где $\alpha_1 = x^1 - \overline{\Phi}(t_1,t_0)x^0$, $\quad W(t_1,t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \overline{\Phi}(t_1,t)B_0(t)B_0'(t)\overline{\Phi}'(t_1,t)dt$. $\qquad$ (3.2)

$$V(\lambda) = B_2'(t_1)\exp\left(A_4'(t_1)\lambda\right)W_*^{-1}\alpha_2, \qquad (3.3)$$

где $\quad W_* = \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(A_4(t_1)\lambda\right)B_2(t_1)B_2'(t_1)\exp\left(A_4'(t_1)\lambda\right)d\lambda, \qquad$ (3.4)

$$\alpha_2 = z^1 - \exp\left(A_4(t_0)\lambda_1\right)(z^0 + A_4^{-1}(t_0)B_2(t_0)\overline{u}^*(t_0)) + A_4^{-1}(t_1)B_2(t_1)\overline{u}^*(t_1) \approx$$
$$\approx \widetilde{z}^1 + A_4^{-1}(t_1)B_2(t_1)\overline{u}^*(t_1), \;\; \lambda_1 = (t_1 - t_0)/\mu, \quad \lambda = (t_1 - t)/\mu.$$

Матрицы $W(t_1,t_0)$ в (3.2) и W_* в (3.4) соответственно являются операторами Грама медленной и быстрой подсистем системы (2.34), а их оптимальные траектории определяются соотношениями:

$$\overline{x}_0(t) = \overline{\Phi}(t,t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,s)B_0(s)u(s)ds, \qquad (3.5)$$

$$\widetilde{z}_0(t,\mu) = \exp\left(A_4(t_0)\lambda_1\right)\left(\widetilde{z}^0 + A_4^{-1}(t_0)B_2(t_0)\overline{u}^*(t_0)\right) - A_4^{-1}(t)B_2(t)\overline{u}^*(t) +$$
$$+ W(\sigma,\sigma_0)\cdot\exp\left(-A_4'(t_1)\sigma\right)\cdot W_*^{-1}\left(\widetilde{z}^1 - \exp\left(A_4(t_0)\lambda_1\right)\left(\widetilde{z}^0 + A_4^{-1}(t_0)B_2(t_0)\overline{u}^*(t_0)\right) + A_4^{-1}(t_1)B_2(t_1)\overline{u}^*(t_1)\right),$$

где $\quad W(\sigma,\sigma_0) = \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \exp\left(-A_4(t_1)(\nu-\sigma)\right)B_2(t_1)B_2'(t_1)\exp\left(-A_4'(t_1)(\nu-\sigma)\right)d\nu,$

$\sigma = -\lambda = (t - t_1)/\mu, \quad \tau = (t - t_0)/\mu, \; \sigma_0 = (t_0 - t_1)/\mu, \quad \lambda_1 = (t_1 - t_0)/\mu.$

ТЕОРЕМА 3.1. Если матрица $A_4(t)$ – устойчива при $t_0 \le t \le t_1$, то при управлении $u(t) = V(\lambda)$, вектор $\widetilde{z}_0(t,\mu)$ определяется формулой

$$\widetilde{z}_0(t,\mu) = \exp\left(A_4(t_0)\tau\right)\left(\widetilde{z}^0 + A_4^{-1}(t_0)B_2(t_0)u^*(t_0)\right) - A_4^{-1}(t)B_2(t)\overline{u}^*(t) +$$
$$+ \left(W_* - \exp\left(A_4(t_1)\tau\right)W_*\exp\left(A_4'(t_1)\tau\right)\right)\cdot\exp\left(-A_4'(t_1)\sigma\right)W_*^{-1}\alpha_2 =$$
$$= \exp\left(A_4(t_0)\tau\right)\left(\widetilde{z}^0 + A_4^{-1}(t_0)B_2(t_0)u^*(t_0)\right) -$$
$$- A_4^{-1}(t)B_2(t)u^*(t) + W_*\exp\left(-A_4'(t_1)\sigma\right)W_*^{-1}\alpha_2 + O\left(\exp(\gamma\tau)\right), \quad (\gamma < 0). \qquad (3.6)$$

ПРИМЕР 3.1. Известно (В.С. Пугачев, 1974), что уравнение движения катушки «чувствительного магнитоэлектрического элемента» описывается уравнением $\frac{J}{\gamma}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_1k_2}{R\gamma}\frac{dx}{dt} + x = \frac{k_1}{R\gamma}u_{вх}$, где $x(t)$ – угол поворота катушки, J – момент инерции катушки, γ – жесткость пружин, k_1, k_2 – постоянные коэффициенты пропорциональности, $k_2\dot{x}$ – э.д.с. в катушке при вращении её со скоростью $\dot{x}$, R – омическое сопротивление, $u_{вх}$ – напряжение подаваемое на катушку. При выполнении условия $(k_1k_2/R\gamma)^2 > 4J\gamma$, уравнение движения катушки можно представить в виде

$$T_1T_2\frac{d^2x}{dt^2}=(T_1+T_2)\frac{dx}{dt}+x=ku_{вх}, \qquad (3.7)$$

где $T_1T_2=J/\gamma$, $T_1+T_2=k_1k_2/R\gamma^2$, $k=k_1/R\gamma$ – коэффициент усиления.

Требуется найти алгоритм управления, переводящий объект (3.7) из состояния $x(t_0)=a,\ \dot{x}(t_0)=b$ в состояние $x(t_1)=0,\ \dot{x}(t_1)=0$, чтобы при этом функционал $J=\int\limits_{t_0}^{t_1}u^2(t)dt\to\min$, где $t_0,\ t_1$ – фиксированные значения времени.

Пусть $T_1+T_2=1$, $T_1T_2=\mu$, $t_0=0$, $t_1=1$(сек), $0<\mu<1$, k=1, тогда из (3.7) получаем $\mu\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x(t)=u(t)$. Вводя замену переменных $x_1(t)=x(t),\ x_2(t)=\dot{x}(t)$, получаем задачу

$$J=\int\limits_0^1 u^2(t,\mu)dt\to\min,\ \dot{x}_1(t)=-x_1(t)+u(t),\qquad x_1(0)=a,\ x_1(1)=0, \qquad (3.8)$$

$$\mu\dot{\tilde{x}}_2(t)=-\tilde{x}_2(t)+\left(1/(1-\mu)\right)u(t),\ \tilde{x}_2(0)=b+a/(1-\mu),\quad \tilde{x}_2(1)=0,\ \tilde{x}_2(t)=x_2(t)-\left(1/(1-\mu)\right)x_1(t).$$

На основании (3.1) – (3.5) получаем следующие решения задачи (3.8):

$$\bar{u}^*(t)=-\exp\left(-(1-t)\right)2a\exp(-1)/\left(1-\exp(-2)\right)=\left(2a\exp t\right)/(1-\exp 2),$$

$$V(t,\mu)=-\frac{(1-\mu)\exp\left(-(1-t)/\mu\right)}{1-\exp\left(-2/\mu\right)}((b+\frac{a}{1-\mu}-\frac{2a}{1-\exp 2})\exp\left(-1/\mu\right)+\frac{2a\exp 1}{1-\exp 2}),$$

$$x_1(t)=a\exp(-t)+\left(2a\exp(-t)\right)/(1-\exp 2)\int\limits_0^t\exp(2s)ds=a\exp(-t)-\left(a\exp(-t)\right)/(1-\exp 2)(1-\exp(2t),$$

$$\tilde{x}_2(t,\mu)=\exp\left(-t/\mu\right)(b+a/(1-\mu)-2a/(1-\exp 2)+\left(2a\exp t\right)/\left(1-\exp 2\right)-$$
$$-1/\left(1-\exp\left(-2/\mu\right)\right)((b+a/(1-\mu)-2a/\left(1-\exp 2\right))\exp\left(-1/\mu\right)+$$
$$+\left(2a\exp 1\right)/\left(1-\exp 2\right))\exp\left(-(t+1)/\mu\right)(\exp(2t/\mu)-1).$$

В §3.2 на основе алгоритма решения задачи 2.1, построен алгоритм решения квазилинейной терминальной задачи.

В §3.3 рассмотрена задача 2.2. Уравнения (2.15), (2.16) переписываем в виде

$$\dot{\tilde{y}}=\tilde{A}(t,\mu)\tilde{y}+\tilde{B}(t,\mu)u,\qquad \tilde{y}(t_0)=M^{-1}y(t_0)=\tilde{y}^0. \qquad (3.9)$$

где $\tilde{A}(t,\mu)$ определяется из (2.46), $\tilde{B}(t,\mu)=M^{-1}(t,\mu)B(t,\mu)$.

Тогда функционал (2.12) примет вид

$$J(u)=\int\limits_{t_0}^{t_1}u'(t)S(t)u(t)dt+\tilde{y}'(t_1)N\tilde{y}(t_1), \qquad (3.10)$$

где $N=M_1'RM_1,\qquad M_1=\begin{pmatrix}E_n & -\mu Q_1\\ P_1 & E_m-\mu P_1Q_1\end{pmatrix},\qquad P_1=P(t_1),\ \ Q_1=Q(t_1).$

Оптимальным управлением для объекта (3.9) с критерием качества (3.10) является функция $u(t)=-S^{-1}(t)\tilde{B}'(t,\mu)K(t,N,t_1)\tilde{y}(t)$, (3.11)

где матрица $K=K(t,N,t_1)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{K}=-K\tilde{A}(t,\mu)-\tilde{A}'(t,\mu)K+K\tilde{B}(t,\mu)S^{-1}(t)\tilde{B}'(t,\mu)K,\qquad K(t_1)=N. \qquad (3.12)$$

Из уравнения (3.12) получаем

$$\dot{W}=\tilde{\mathrm{A}}(t,\mu)W+W'\tilde{\mathrm{A}}(t,\mu)-\tilde{B}(t,\mu)S^{-1}(t)\tilde{B}'(t,\mu),\qquad W(t_1)=N_1^{-1},\ W(t)=K^{-1}(t). \qquad (3.13)$$

Если ввести блочную матрицу в форме $W = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3/\mu \end{pmatrix}$, то из (3.13) получаем: $\dot{W}_1 = \widetilde{A}_1(t,\mu)W_1 + W_1\widetilde{A}_1'(t,\mu) - H_1(t,\mu)$, $\qquad W_1(t_1) = L_1$,

$$\mu\dot{W}_2 = \mu\widetilde{A}_1(t,\mu)W_2 + W_2'\widetilde{A}_4'(t,\mu) - H_2(t,\mu),\; W_2(t_1) = L_2, \tag{3.14}$$

$$\mu\dot{W}_3 = \widetilde{A}_4(t,\mu)W_3 + W_3\widetilde{A}_4'(t,\mu) - H_3(t,\mu),\quad W_3(t_1) = L_3,$$

где $\quad L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2' & L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2' & N_3 \end{pmatrix}^{-1}$, $\quad N_1 = R_1 + P_1'R_2' + R_2P_1 + P_1'R_3P_1$, $\quad N_2 = R_2 + P_1'R_3 - \mu N_1 Q$,

$N_3 = R_3 - \mu(R_2' + R_3P_1)Q_1 - \mu Q_1'(R_2 + P_1'R_3) + \mu^2 Q_1'N_1Q_1$, $H_1(t,\mu) = \widetilde{B}_1(t,\mu)\widetilde{B}_1'(t,\mu)$,

$H_2(t,\mu) = \widetilde{B}_1(t,\mu)\widetilde{B}_2'(t,\mu)$, $\quad H_3(t,\mu) = \widetilde{B}_2(t,\mu)\widetilde{B}_2'(t,\mu)$.

Если матрицы $\Phi(t,s,\mu)$ и $\Psi(t,s,\mu)$ – удовлетворяют уравнениям (2.21) и (2.22), то

$$W_1(t,t_1,\mu) = \Phi(t,t_1,\mu)L_1 \cdot \Phi'(t,t_1,\mu) + \overline{W}_1(t,t_1,\mu), \tag{3.15}$$

$$W_2(t,t_1,\mu) = \Phi(t,t_1,\mu)L_2\Psi'(t_1,t_1,\mu) + \overline{W}_2(t,t_1,\mu),$$

$$W_3(t,t_1,\mu) = \Psi(t,t_1,\mu)L_3\Psi'(t,t_1,\mu) + \overline{W}_3(t,t_1,\mu),$$

являются решениями уравнения (3.14), где

$$\overline{W}_1(t,t_0,\mu) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s,\mu)H_1(s,\mu)\Phi'(t,s,\mu)ds,\; \overline{W}_2(t,t_0,\mu) = (1/\mu)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,s,\mu)H_2(s,\mu)\Psi'(t,s,\mu)ds,$$

$$\overline{W}_3(t,t_0,\mu) = (1/\mu)\int_{t_0}^{t} \Psi(t,s,\mu)H_3(s,\mu)\Psi'(t,s,\mu)ds. \tag{3.16}$$

ТЕОРЕМА 3.2. Если матрицы W_1 и $D = W_3 - W_2' \cdot W_1^{-1}W_2$ при $\mu << 1$ для всех t в интервале $t_0 \le t \le t_1$ обратимы, то существует управление (3.11), которое минимизирует (3.10). При этом $K_1 = W_1^{-1} + W_1^{-1}W_2D^{-1}W_2 \cdot W_1^{-1}$,

$$K_2 = -W_1^{-1}W_2D^{-1},\quad K_3 = D^{-1},\qquad D = W_3 - W_2' \cdot W_1^{-1}W_2. \tag{3.17}$$

В §3.3 рассмотрена задача

$$J = \int_0^\infty \big(u'(t,\mu)u(t,\mu) + x'(t,\mu)L_1x(t,\mu) + z'(t,\mu)L_2z(t,\mu)\big)dt \to \min, \tag{3.18}$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t,\mu = A_1x(t,\mu) + A_2z(t,\mu) + B_1u(t),\; x(0) = x^0, \tag{3.19}$$

$$\mu\dot{z}(t,\mu) = A_3x(t,\mu) + A_4z(t,\mu) + B_2u(t),\; z(0) = z^0,$$

где A_i $(i = \overline{1,4})$ и B_j $(j = 1,2)$ – постоянные матрицы; $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ – симметрические постоянные матрицы. Заменим систему (3.17) эквивалентной системой

$$\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{A}_1\widetilde{x} + B_1u,\; \widetilde{x}(0) = \widetilde{x}^0,\quad \mu\dot{\widetilde{z}} = \widetilde{A}_4\widetilde{z} + \widetilde{B}_2u,\; \widetilde{z}(0) = \widetilde{z}^0, \tag{3.20}$$

где матрицы $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_4$, $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$ определяются из (2.38), а матрицы $P = P(\mu)$, $Q = Q(\mu)$ – из уравнений:

$$\mu P\widetilde{A}_1 = A_3 + A_4P,\qquad \mu\widetilde{A}_1Q = A_2 + Q\widetilde{A}_4. \tag{3.21}$$

По условию задачи матрицы A_0, A_4 устойчивы, тогда система (3.19) имеет интегральные многообразия:

$$D_m = \{(x, Px) \mid \widetilde{x} = x \in R^n, z = Px, z \in R^n,\quad \mu \in [0,1),\quad t \ge 0\}, \tag{3.22}$$

$$D_\delta = \left\{(-\mu Q\widetilde{z},\ \widetilde{z}) \middle|\ \widetilde{z} \in R^m,\ x = -\mu Q\widetilde{z} \in R^n,\quad \mu \in [0,1),\quad t \geq 0\right\}.$$

При выполнении условия:

$$\left(b_i^{(1)},\quad \mu P b_i^{(1)}\right) \in D_m,\ \left(-Q\widetilde{b}_i^{(1)},\quad (1/\mu)\widetilde{b}_i^{(2)}\right) \in D_\delta,\ \widetilde{b}_i^{(2)} = b_i^{(2)} - \mu P b_i^{(1)},\quad i = \overline{1, r}. \quad (3.23)$$

где $b_i^{(1)} = col\left(b_{1i}^{(1)}, b_{2i}^{(1)}, \ldots, b_{ni}^{(1)}\right)$, $b_i^{(2)} = col\left(b_{1i}^{(2)}, b_{2i}^{(2)}, \ldots, b_{ni}^{(2)}\right)$, $i = \overline{1, r}$, $b_{ki}^{(1)}$ $\left(k = \overline{1, n};\quad i = \overline{1, r}\right)$, $b_{ji}^{(1)}$ $\left(j = \overline{1, m};\quad i = \overline{1, r}\right)$ – элементы матриц $B_1 = B_1(t, \mu)$ и $B_2 = B_2(t, \mu)$, получаем

$$\mathrm{u(t}, \mu) = \begin{cases} -\mathrm{B}_1' K_m x, & x \in R^n,\quad (b_i^{(1)}, \mu P b_i^{(1)}) \in D_m,\quad i = \overline{1, r}; \\ -\widetilde{B}_2' K_\delta \widetilde{z}, & \widetilde{z} \in R^m,\quad (-Q\widetilde{b}_i^{(2)},\quad \widetilde{b}_i^{(2)}/\mu) \in D_\delta,\quad i = \overline{1, r}, \end{cases} \quad (3.24)$$

где K_m, K_δ – $(n \times n)$, $(m \times m)$ размерности соответственно, «матрицы усиления». Эти матрицы – положительно определенные решения уравнения:

$$\widetilde{A}_1' K_m + K_m \widetilde{A}_1 - K_m \widetilde{B}_1 \widetilde{B}_1' K_m + L_m = 0,\ \widetilde{A}_4' K_\delta + K_\delta \widetilde{A}_4 - K_\delta \widetilde{B}_2 \widetilde{B}_2' K_\delta + L_\delta = 0. \quad (3.25)$$

Тогда задача (3.18), (3.20) распадаются на задачи:

$$J_m = \int_0^\infty \left(u'(t)u(t) + x'(t)L_m x(t)\right)dt \to \min, \quad (3.26)$$

$$\dot{x} = \widetilde{A}_1 x + \widetilde{B}_1 u,\quad x(0) = x^0,\ z = Px,\ L_m = L_1 + P' L_2 P,\quad x = \widetilde{x}. \quad (3.27)$$

$$J_\delta = \int_0^\infty \left(u'(t)u(t) + \widetilde{z}(t) L_\delta \widetilde{z}(t)\right)dt \to \min, \quad (3.28)$$

$$\mu \dot{\widetilde{z}} = \widetilde{A}_4 \widetilde{z} + \widetilde{B}_2 u,\quad \widetilde{z}(0) = \widetilde{z}^0,\ \widetilde{x} = -\mu Q\widetilde{z},\ L_\delta = (E_m - \mu PQ)' L_2 (E_m - \mu PQ) + \mu^2 Q' L_1 Q. \quad (3.29)$$

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть выполняются условия (3.23) и подсистемы (3.20) управляемы. Тогда в интегральных многообразиях (3.22) существуют управления $u_m(t)$ и $u_\delta(t)$ для подсистем (3.26) и (3.29), которые соответственно минимизируют функционалы (3.26) и (3.28), причем: $\min J_m = x^{0\prime} K_m x^0$, $\min J_\delta = \mu \widetilde{z}^{0\prime} K_\delta \widetilde{z}^0$. При этом минимизирующие управления в виде обратной связи определяются как:

$$u_m = -B_1' K_m x,\ u_\delta = -\widetilde{B}_2' K_\delta \widetilde{z}, \quad (3.30)$$

а в разомкнутой форме:

$$u_m(t) = -B_1' K_m \exp\left((\widetilde{A}_1 - \widetilde{B}_1 \widetilde{B}_2 K_m)t\right)x^0,\ u_\delta(t, \mu) = -\widetilde{B}_2' K_\delta \exp\left((\widetilde{A}_4 - \widetilde{B}_2 \widetilde{B}_2' K_\delta)(1/\mu)\right)\widetilde{z}^0. \quad (3.31)$$

В этом же параграфе рассмотрен общий случай, когда не выполняются условия (3.23). С учетом (2.18) функционал (3.18) преобразуется к виду

$$J = \int_0^\infty \left(u'(t)u(t) + \widetilde{y}'(t)\widetilde{L}\widetilde{y}(t)\right)dt, \quad (3.31)$$

где $\widetilde{L} = \begin{pmatrix} \widetilde{L}_m & \widetilde{L}_S \\ \widetilde{L}_S' & \widetilde{L}_\delta \end{pmatrix}$, $\widetilde{L}_m = L_1 + P' L_2 P$, $\quad \widetilde{L}_S = -\mu L_1 Q + P' L_2 (E_m - \mu PQ)$,

$$\widetilde{L}_\delta = -\mu^2 Q' L_1 Q + (E_m - \mu PQ)' L_2 (E_m - \mu PQ).$$

Решения задачи (3.20), (3.31) дается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 3.4. Если каждая пара $\{A_0, B_0\}$, $\{A_4, B_2\}$ управляема, то при $\mu \ll 1$ задача (3.20), (3.31) разрешима на интегральных многообразиях (3.22), причем на этих многообразиях решаются независимо друг от друга две вариационные задачи, соответствующие медленным и быстрым подсистемам системы (3.20). При этом оптимальное управление определяется:

а) в форме обратной связи

$$u(t,\mu)=\begin{cases} -B'_m K_1 x, & x\in R^n, \quad (b_i^{(1)},\ \mu P b_i^{(1)})\notin D_m, \\ -B'_\delta K_3 \widetilde{z}, & \widetilde{z}\in R^m, \quad (-Q\widetilde{b}_i^{(2)},\ \widetilde{b}_i^{(2)}/\mu)\notin D_\delta, \quad i=\overline{1,r}; \end{cases}$$

б) в разомкнутой форме

$$u(t,\mu)=\begin{cases} -B'_m K_1 \exp\left((\widetilde{A}_1-\widetilde{S}_1 K_1)t\right)\widetilde{x}_0, & \widetilde{x}_0\in R^n, \quad t\in[0,\infty), \\ -B'_\delta K_3 \exp\left((\widetilde{A}_4-\widetilde{S}_3 K_3)(t/\mu)\right)\widetilde{z}_0, & \widetilde{z}\in R^m, \quad 0<\mu<1, \quad t\in[0,\infty), \end{cases}$$

где $B'_m=\widetilde{B}'_1-\widetilde{B}'_2 S_3^{-1}S'_2$ или $B_m=\widetilde{B}_1-S_2 S_3^{-1}\widetilde{B}_2$, $B'_\delta=\widetilde{B}'_2-\widetilde{B}'_1 S_1^{-1}S_2$ или $B_\delta=\widetilde{B}_2-S'_2 S_1^{-1}B_1$, $\widetilde{S}_1=S_1-S_2 S_3^{-1}S'_2$, $\widetilde{S}_3=S_3-S'_2 S_1^{-1}S_2$, $S_1=\widetilde{B}_1\cdot\widetilde{B}'_1$, $S_2=\widetilde{B}_1\cdot\widetilde{B}'_2$, $S_3=\widetilde{B}_2\cdot\widetilde{B}'_2$.

В этом же параграфе рассмотрен пример 3.2, на проектирование управляющего устройства с обратной связью электрической цепи и приведены результаты численных расчетов, подтверждающих теоретические выводы.

В приложении приведен код программы и результат вычислений примера 3.1.

Выражаю глубокую благодарность научному руководителю доценту З.К. Иманалиеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы., Апышев Ж.А. Оптимальное управление непрерывными квазилинейными системами с квадратичными критериями качества // Технологии и перспективы современного инженерного образования, науки и производства. Межд. научн. конф., посв. 45-летию организации ФПИ – КТУ им. И.Раззакова. – Бишкек, 1999. – С. 8-12.

2. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы., Тологонов К.Т. Применение метода пограничных функций к некоторым задачам оптимального управления // Технологии и перспективы современного инженерного образования, науки и производства. Межд. научн. конф., посв. 45-летию организации ФПИ – КТУ им. И.Раззакова. – Бишкек , 1999. – С. 28-32.

3. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы., Баракова Ж.Т. Об одном способе построения решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с квадратичным функционалом // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2000. – Вып. 29. – С. 261-165.

Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. О переходных матрицах медленных и быстрых подсистем управляемой системы с малым параметром // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике. Международ. научн. конф. Вестник КГНУ, сер 3. Вып 6. – Бишкек, 2001. – С. 235-239.

5. Иманалиев З.К., Пахыров З.П., Аширбаев Б.Ы., Баракова Ж.Т. Разделение быстрых и медленных движений системы управления с малым параметром // Современные технологии и управления качеством в образовании,

науке и производстве: опыт адаптации и внедрения». Междунар. научн. конф. КТУ им. И.Раззакова. – Бишкек, 2001. – С. 244-250.

6. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Оценка квадратичного функционала для решения сингулярно возмущенной системы // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2001. – Вып 30. – С. 379-383.

7. Аширбаев Б.Ы. Построение переходной матрицы методом пограничных функций // Физика и физическое образование. Научно-практич. конф., посв. 70-летию факультета физики и электроники КНУ им Ж. Баласагына. Вестник КНУ. Вып 3. – 2003. – С. 73-79.

8. Иманалиев З.К, Аширбаев Б.Ы., Баракова Ж.Т. Управление с минимальной нормой в сингулярно возмущенной системе с фиксированными конечными состояниями // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2004. – Вып 33. – С. 175-188.

9. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Асимптотическое построение переходной матрицы методом пограничных функций // Кыргыз-Турк «Манас» университети. Табигый илимдер журналы. – 2004. – №5. – С. 13-23.

10. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Управление с минимальной энергией в сингулярно возмущенной системе с постоянными коэффициентами // Вестник Каз. НУ им. аль-Фараби, №3 (46). – Алматы, 2005. – С. 9-15.

11. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Об одной сингулярно возмущенной задаче оптимального управления в энергетическом пространстве // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2005. – Вып. 33. – С. 169-174.

12. Аширбаев Б.Ы. Оптимальное управление непрерывными, квазилинейными, сингулярно возмущенными системами с квадратичным критерием качества // Вестник КНУ им Ж. Баласагына. Вып 3, сер. 5, 2005. – С. 10-16.

13. Аширбаев Б.Ы. Сингулярно возмущенная задача управления с минимальной энергией в гильбертовом пространстве // Проблемы прикладной математики, механики и инженерного образования. Респуб. конф., посв. 50-летию КНТУ им И. Раззакова, 2005. – С. 38-43.

14. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы., Баракова Ж.Т. Разделение движений в управляемых системах с сингулярными возмущениями // Известия КГТУ им.И.Раззакова. – 2006. – № 8. – С.75-79.

15. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Сингулярно возмущенная задача оптимального управления с квадратичным функционалом // Известия КГТУ им.И.Раззакова. – 2006. – № 8. – С. 79-84.

16. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Аналитическое конструирование линейного регулятора для стационарной системы с сингулярным возмущением // Наука и инновационные образовательные технологии в вузе. Междунар. научно–технич. конф. посв., 80-летию КНУ им. Ж.Баласагына и 10-летию ИИМОП. Вестник КНУ им Ж. Баласагына, сер 6. Вып. 5. – 2006. – С. 426-431.

17. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Вывод одного из критериев управляемости сингулярно возмущенных систем оптимального управления // Инновации в образовании, науке и технике. Междунар. Научно-технич. конф.

посв., 100-летию первого ректора КГТУ им. И. Раззакова, проф. Сухомлинова Г.А. // Известия КГТУ им.И.Раззакова. – 2006. – № 9. Т.II. – С. 5-10.

18. Аширбаев Б.Ы. Вычисление квадратичного функционала для решения сингулярно возмущенной системы // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына, сер. 3. Естественно-технические науки. Вып. 3. – 2006. – С. 148-152.

19. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Аналитическое конструирование стационарных регуляторов на интегральном многообразии сингулярно возмущенной системы // Известия КГТУ им. И.Раззакова. – 2006. – № 10. – С. 181-185.

20. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Решение задачи аналитического конструирования регулятора для стационарной сингулярно возмущенной системы методом разделения движений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 35. – С. 212-216.

21. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Декомпозиция задач оптимального управления с сингулярными возмущениями на интегральных многообразиях // Известия КГТУ им. И.Раззакова. – 2007. – №11. – С. 79-84.

22. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Разделение движений сингулярно возмущенной управляемой системы // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 36. – С. 136-141.

23. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Разделение медленных и быстрых процессов в сингулярно возмущенной управляемой системе // Известия КГТУ им. И.Раззакова. – 2008. – № 12. – С. 173-178.

Ашырбаев Бейшембек Ыбышевичтин
«Сингулярдык дүүлүктүрүлгөн теьдемелер теориясындагы жана оптималдык башкаруу маселелериндеги Грам оператору» деген темада 01.01.02 – дифференциалдык теьдемелер адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты илимий даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациянын

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: Грам оператору, сингулярдык дүүлүктүрүлгөн, өтмө матрицасы, башкарылуучу система, жөнгө салгыч, туруктуу система, интегралдык көп түспөлдүүлүк, орточо квадраттык четтөө.

Диссертацияда жай жана тез координаттарды декомпозициялоо ыкмасы сунуш кылынган жана өтмө матрицасынын формуласы алынган. Бул формула аркылуу баштапкы системанын векторун жай жана тез векторлорго бөлүүгө мүмкүнчүлүк болду, ошондой эле сызыктуу дүүлүктүрүлгөн системасынын өтмө матрицасы түзүлдү.

Грам операторунун касиеттеринин жана кыймылды бөлүү методунун негизинде жай жана тез өзгөрмөлөрдүн абалдары туура келүүчү мейкиндиктерде аракеттенүүчү башкарылуучулук критерийи чыгарылды жана стационардык башкарылуучу системаны мейкиндиктин каалаган чекитинен координата башталышына которууну камсыз кылуучу, эки жөнгө салгычтан турган, сызыктуу жөнгө салгыч конструкцияланды. Башкарылуучу системанын туруктуу, теь салмактуу кыймылынан орточо квадраттык четтөөсүн мүнөздөөчү функционалдын маанисин эсептөөнүн асимптотикалык ыкмасы сунуш кылынды. Системанын акыркы чекиттердеги абалдары мурунтан берилген чоьдуктар болгон учурда оптималдык башкаруунун сызыктуу жана сызыктуу эмес сингулярдык дүүлүктүрүлгөн оптималдуу башкарылуу маселелеринин чыгарылыштарын табуу алгоритмдери түзүлдү. Системанын акыркы чекиттердеги абалдары эркин болгон учурдагы оптималдык башкаруунун сингулярдык дүүлүктүрүлгөн маселелерин чыгаруунун асимптотикалык ыкмасы сунуш кылынды. Оптималдык башкаруунун сингулярдык дүүлүктүрүлгөн системасынын квадраттык функционалы менен берилген маселелер үчүн интегралдык көп түспөлдүүлүк методуна таянып алгачкы маселени жөнөкөй эки маселеге бөлүп чыгаруу ыкмасы сунуш кылынды.

РЕЗЮМЕ

диссертации **Аширбаева Бейшембека Ыбышевича на тему «Оператор Грама в теории сингулярно-возмущенных уравнений и в задачах оптимального управления»,** представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения

Ключевые слова: оператор Грама, сингулярные возмущения, переходная матрица, управляемая система, регулятор, устойчивая система, интегральное многообразие, среднеквадратическое отклонение.

В диссертации предложен способ декомпозиции медленных и быстрых координат и получена формула переходной матрицы, которая позволяет разделить вектора состояния исходной системы на медленные и быстрые подвекторы, а также построена переходная матрица линейной сингулярно возмущенной системы. На основе свойств оператора Грама и метода разделения движений: выведен критерий управляемости, действующий в соответствующих векторных пространствах медленных и быстрых переменных состояния и для управляемой стационарной системы с медленными и быстрыми движениями сконструирован линейный регулятор, состоящий из двух подрегуляторов, которые обеспечивают перевод системы из любой точки пространства в начало координат. Предложен асимптотический способ вычисления значения функционала, характеризующего величину среднеквадратического отклонения траектории движения управляемой системы от устойчивого равновесия. Построены алгоритмы решения линейной и нелинейной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с фиксированными конечными состояниями. Разработан асимптотический способ для решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления со свободными конечными состояниями и предложен способ декомпозиции на интегральных многообразиях, для задач оптимального управления сингулярно возмущенной системы с квадратичным критерием качества.

RESUME

Ashirbaev Beishembek Ybyshevich

«Application of Gram operator in theory of singularly-perturbed equations and optimal control problems» submitted for confer the degree of candidate of physics-mathematic sciences on specialty 01.01.02 – differential equations

Key words: Gram operator, singular perturbation, transfer matrix, controlled system, controller, stable system, integral manifold, mean square deviation.

In the dissertation the method of decomposition of slow and fast coordinates and a transfer matrix formula was derived. The formula provides to separate the vector of original state to slow and fast sub vectors, also constructed the transfer matrix of linear singularly perturbed system. On the basis of Gram operator property and method of motion decomposition: The criteria of controllability was worked out, acting in suitable vector spaces of slow and fast cariables condition and for controlling stationary system with slow and fast motion, the linear controller was constructed, which consists of two sub controllers, providing the transfer of the system from any point of space to the origin of coordinates. The asymptotic methods of functional value calculation were suggested, characterizing the amount of mean square deviation of trajectory, controlling system motion path from stable equilibrium. The solving algorithm of linear and non-linear singular problems of optimal control with the fixed finite conditions was constructed. The asymptotic method for singular problems and method of solving of optimal control with free finite conditions and decomposition method on integral manifolds for the problem of optimal control of singular system with quadratic criteria of quality were developed.