МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.9

Асанов Авыт

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

01.01.02 – дифференциальные уравнения

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск–1992

Работа выполнена в Институте математики АН Республика
Кыргызстан

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор А.Л.Бухгейм,
доктор физико-математических наук,
профессор А.Д.Искендеров,
доктор физико-математических наук,
профессор В.П.Танана

Ведущая организация: Красноярский ВЦ СО РАН

Защита состоится "09" февраля 1993 года в 14^00 час. на заседании специализированного совета Д 063.98.02 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук в Новосибирском госуниверситете по адресу: 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирском госуниверситете

Автореферат разослан "04" января 1993 года.

Ученый секретарь
специализированного совета
д.ф.-м.н. А.В.Кажихов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Интегральные и операторные уравнения Вольтерра возникают в теоретических и прикладных науках. Это объясняется тем, что к уравнениям Вольтерра сводятся различные обратные задачи для дифференциальных уравнений и задачи интегральной геометрии. Многие важные вопросы геофизики, физики, техники, химии, медицины приводятся к таким уравнениям и задачам.

Характерной особенностью интегральных и операторных уравнений первого рода является их некорректность в смысле Ж.Адамара. Исследование уравнений Вольтерра первого рода, как и всех некорректно поставленных задач, было начато сравнительно недавно. Основы теории некорректно поставленных задач были заложены в работах А.Н.Тихонова, М.М.Лаврентьева, В.К.Иванова.

Разнообразные подходы к исследованию и построению алгоритмов решения некорректных задач отражены в работах таких авторов, как А.С.Алексеев, Я.И.Альбер, А.Х.Амиров, Д.С.Аниконов, Ю.Е.Аниконов, В.Я.Арсенин, А.Б.Бакушинский, Н.Я.Безнощенко, Ю.М.Березанский, И.Н.Бернштейн, А.С.Благовещенский, А.Д.Бухгейм, В.М.Вайникко, В.В.Васин, М.Г.Гасымов, М.Л.Гервер, А.В.Гончарский, А.М.Денисов, В.И.Дмитриев, В.Н.Заикин, В.К.Иванов, М.И.Иманалиев, А.Д.Искендеров, С.И.Кабанихин, В.Р.Кирейтов, М.М.Лаврентьев, О.А.Лисковец, Н.А.Магницкий, И.В.Мельникова, В.А.Морозов, Р.Г.Мухометов, А.И. Прилепко, К.Г.Резницкая, В.Г.Романов, В.Н.Страхов, В.П.Танана, А.Н.Тихонов, А.М.Федотов, Е.Я.Хруслов, В.А.Цецохо, В.А.Шарафутдинов, В.Г.Чередниченко, А.Г.Ягола, В.Г.Яхно и др.

Первые результаты для интегральных уравнений Вольтерра были получены в работах В.Вольтерра. В дальнейшем, различные вопросы исследовались в работах таких авторов, как А.С.Апарцин, Ю.П.Боглаев, Ю.А.Ведь, В.Д.Винокуров, А.М.Денисов, М.И.Иманалиев, С.Искандаров, Н.А.Магницкий, Л.Б.Мацнев, Г.М.Мюнтц, В.О.Сергеев, А.Сражидинов, Тен Мен Ян, Е.К.Титчмарш, З.Б.Цалюк и др.

Изучение операторных уравнений Вольтерра первого рода было начато в работах М.М.Лаврентьева, Ю.Е.Аниконова, А.Л.Бухгейма, В.Г.Романова в связи с необходимостью развитие теории обратных задач и задачи интегральной геометрии. Настоящая работа продолжает исследования А.Л.Бухгейма, М.И.Иманалиева, М.М.Лаврентьева, Е.Титчмарша, и посвящена изложению теории интегральных и операторных уравнений Вольтерра первого рода. Работа выполнена в рамках темы "Условно-корректные задачи математической физики и их приложения" (номер гос.регистрации 01.86.0104891) Институт математики АН Республика Кыргызстан.

Цель работы состоит в исследовании вопросов регуляризации, единственности и существования решений интегральных и операторных уравнений Вольтерра, а также задач интегральной геометрии.

Научная новизна работы выражается в новых методах исследования рассматриваемых задач и полученных результатах.

В различных пространствах получены теоремы единственности в целом широкого круга задач для интегральных и операторных уравнений Вольтерра первого рода с недифференцируемыми и необратимыми на диагонали ядрами. В частности, теорема Титчмарша обобщена для систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода типа свертки. Построены вольтерровы регуляризирующие операторы и доказаны теоремы существования. Доказаны новые теоремы единственности для ряда задач интегральной геометрии.

Результаты диссертации продолжают развитие теории интегральных и операторных уравнений Вольтерра. Они находят применение при разработке численных алгоритмов решения задач геофизики и физики, а также используются при чтении специальных курсов.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на Всесоюзном семинаре по некорректно поставленным задачам математической физики и анализа (Новосибирск, 1982), на Всесоюзной конференции "Условно-корректные задачи математической физики" (Алма-Ата, 1989), на Всесоюзной конференции "Асимптотические методы теории сингулярно-возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач" (Бишкек, 1991), на Международной конференции "Некорректно поставленные задачи в естественных науках" (Москва, 1991), на семинаре академика М.М.Лаврентьева (ИМ СО АН СССР), на семинаре член-корр. АН СССР М И.Иманалиева (ИМ АН РК), на семинаре факультета ВМК МГУ, а также на других семинарах и конференциях.

По теме диссертации опубликовано 27 работ. Диссертация состоит из введения, пяти глав, списка литературы, содержащего 192 наименования. Каждая глава делится на разделы (параграфы). Объем текста 245 стр.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обзор литературы и краткое содержание работы.

В первой главе изучаются системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$Ku \equiv \int_{t_0}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t)\ ,\ t \in G\ , \qquad (I)$$

$$\int_{t_0}^{t} K(t,s,u(s))ds = f(t)\ ,\ t \in [t_0,T]\ , \qquad (2)$$

где $G=[t_0,T]$ или $G=[t_0,\infty)$, $K(t,s)$ – $n \times n$ - матричная функция, $K(t,s,u)$ – n - мерная вектор-функция. Наряду с (I) и (2) рассматриваются следующие сингулярно-возмущенные системы интегральных уравнений второго рода

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + Kv = f(t)\ ,\ t \in G\ , \qquad (3)$$

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} K(t,s,v(s,\varepsilon))ds = f(t), t \in [t_0,T], \qquad (4)$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр.

Пусть $\lambda_i(t)$, $i=1,\dots,n$, – собственные значения матрицы $(1/2)[K(t,t)+K^*(t,t)]$, где $K^*(t,t)$ -сопряженная матрица к матрице $K(t,t)$ и

$$\lambda(t) = \min_i \lambda_i(t)\ ,\ t \in G\ . \qquad (5)$$

Обозначим через $\|A\|$ и $\|u\|$ - нормы соответственно для $n \times n$ - матрицы A и для n - мерного вектора u. Будем обозначать через $C_n[t_0,T]$ и $L_n^p(t_0,T)$ пространства n - мерных вектор функций с элементами из $C[t_0,T]$ и $L^p(t_0,T)$, $p \geq 1$ соответственно. На $C_n[t_0,T]$, $L_n^p(t_0,T)$ определим нормы

$$\|u(t)\|_C = \max_{t \in [t_0,T]} \|u(t)\|\ ,\quad \|u(t)\|_p = \left(\int_{t_0}^{T} \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p} .$$

Обозначим через $C^{\gamma}_{\varphi,n}[t_0,T]$, $0<\gamma\leq 1$, линейное пространство всех n - мерных непрерывных вектор-функций $u(t)$, определенных на $[t_0,T]$ и удовлетворяющих условию

$$\| u(t)-u(s)\| \leq C\,|\varphi(t)-\varphi(s)|^{\gamma} ,$$

где $\varphi(t)$ - неубывающая непрерывная функция на $[t_0,T]$ и C - положительная постоянная, зависящая от $u(t)$, но не от t и s . Если $\varphi'(t)$ - ограниченная функция на $[t_0,T]$ и $\varphi'(t)\geq \alpha>0$ при $t\in[t_0,T]$ то $C^{\gamma}_{\varphi,n}[t_0,T]\equiv C^{\gamma}_{n}[t_0,T]$ — пространство Гельдера. Будем обозначать через $L^{p}_{\lambda,n}(t_0,T)$, $p\geq 1$, линейное пространство всех n - мерных измеримых вектор-функций $u(t)$, определенных на $[t_0,T]$ и удовлетворяющих условие

$$\| u(t)\|_{p,\lambda} = \Big(\int_{t_0}^{T}\lambda(t)\, \| u(t)\|^{p} dt\Big)^{1/p} < \infty ,$$

где $\lambda(t)$ - измеримая функция и $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$.

В § I.I системы (I) и (3) рассматриваются на сегменте $[t_0,T]$ сначала при следующих условиях:

а) при любом фиксированном $t\in(t_0,T]$ $\|K(t,s)\|\in L^{q_1}(t_0,t)$, $q_1\geq 1$, $\|K(t,t)\|\in L^{q_0}(t_0,T)$, $\lambda(t)\geq 0$ при $t\in[t_0,T]$ и $\lambda(t)\in L^{q_0}(t_0,T)$, $q_0\geq 1$, где $\lambda(t)$ - определена с помощью формулы (5);

б) при $\tau>\eta$ для любых $(\tau,s),(\eta,s)\in\Omega=\{(t,s)\mid t_0<s<t<T\}$ справедлива оценка

$$\| K(\tau,s)-K(\eta,s)\| \leq \ell(s)\Big(\int_{\eta}^{\tau}\lambda(s)\,ds\Big) ,$$

где $\ell(t)\geq 0$ при $t\in[t_0,T]$, $\ell(t)\in L^{q_1}(t_0,T)$, $q_1\geq 1$.

Теорема I. Пусть выполняются условия а) и б). Тогда

I) если $\|K(t,t)\|\leq N_0\lambda(t)$, $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$, и система (I) имеет решение $u(t)\in C_n[t_0,T]$ и $u(t_0)=0$, то решение $\vartheta(t,\varepsilon)$ системы (3) при $\varepsilon\mapsto 0$ сходится по норме $C_n[t_0,T]$ к $u(t)$. При этом справедлива оценка

$$\| \vartheta(t,\varepsilon)-u(t)\|_{C} \leq M\,(2N_0+1)\, e^{-(1/\varepsilon^{1-\beta})} + M\,(N_0+1)\,\omega_{\Pi}(\varepsilon^{\beta}) ,$$

где $\beta\in(0,1)$, $M=\sqrt{n}\,exp\big[\sqrt{n}\int_{t_0}^{T}\ell(s)\,ds\big]$,

$$\omega_{\bar u}(\delta) = \sup_{\substack{|x-\nu|\le\delta \\ x,\nu\in[0,\varphi(T)]}} \| u(\varphi^{-1}(x)) - u(\varphi^{-1}(\nu))\| ,$$

$\varphi^{-1}(x)$ – обратная функция к $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds$, $t\in[t_0,T]$;
2) если $\|K(t,t)\| \le N_0\lambda(t)$ при $t \in [t_0,T]$, система (I) имеет решение $u(t)\in C^{\gamma}_{\varphi,n}[t_0,T]$, $0<\gamma\le 1$, $u(t_0)=0$, то решение $\vartheta(t,\varepsilon)$ системы (3) при $\varepsilon\mapsto 0$ сходится по норме $C_n[t_0,T]$ к $u(t)$ и справедливо неравенство

$$\|\vartheta(t,\varepsilon) - u(t)\|_C \le C\varepsilon^{\gamma},$$

где $0<C$ – известная постоянная, независящая от ε ;
3) если система (I) имеет решение $u(t)\in C^{1}_{\varphi,n}[t_0,T]$, $u(t_0)=0$, то решение $\vartheta(t,\varepsilon)$ системы (3) при $\varepsilon\mapsto 0$ сходится по норме $C_n[t_0,T]$ и справедливо соотношение

$$\|\vartheta(t,\varepsilon) - u(t_0)\|_C \le C\varepsilon ;$$

4) если $\|K(t,t)\| \le N_0\lambda(t)$ и $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$, существует число $q>1$ такое, что $\ell^{q}(t)/\lambda^{q-1}(t)\in L^{1}(t_0,T)$, система (I) имеет решение $u(t)\in L^{p}_{\lambda,n}(t_0,T)$, $1/p+1/q=1$, то решение $\vartheta(t,\varepsilon)$ системы (3) при $\varepsilon\mapsto 0$ сходится по норме $L^{p}_{\lambda,n}(t_0,T)$ и справедлива оценка

$$\|\vartheta(t,\varepsilon) - u(t)\|_{p,\lambda} \le C\Big\{\Big[\int_0^{\varepsilon^{\beta}} \|u(\varphi^{-1}(x))\|^p dx + \|u(t)\|^p_{p,\lambda}\exp(-p/\varepsilon^{1-\beta})\Big]^{1/p} +$$

$$+ 2(1/p)^{1/p}(1/q)^{1/q}\Big[\nu^p_{\bar u}(\varepsilon^{\beta}) + 2^p\|u(t)\|^p_{p,\lambda}\exp(-p/(2\varepsilon^{1-\beta}))\Big]^{1/p}\Big\},$$

где $\beta\in(0,1)$, $\nu_{\bar u}(\delta) = \sup_{0<h\le\delta} \|u(\varphi^{-1}(x+h)) - u(\varphi^{-1}(x))\|_p$.

Следствие. Пусть выполняются условия а) и б). Тогда
I) если $\|K(t,t)\| \le N_0\lambda(t)$ и $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$, то решение системы (I) единственно в $C_n[t_0,T]$;
2) если $\|K(t,t)\| \le N_0\lambda(t)$ при $t\in[t_0,T]$ и существует число $\delta\in(t_0,T]$ такое, что $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in(t_0,\delta)$,

то решение системы (I) единственно в $C^{\gamma}_{\varphi,n}[t_0,T]$, $0<\gamma\le 1$;
3) если существует число $\delta\in(t_0,T]$ такое, что $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in(t_0,\delta)$, то решение системы (I) единственно в $C^{1}_{\varphi,n}[t_0,T]$;
4) если $\|K(t,t)\|\le N_0\lambda(t)$ и $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$, существует число $q>1$ такое, что $\ell^{q}(t)/\lambda^{q-1}(t)\in L^{1}(t_0,T)$, то решение системы (I) единственно в $L^{p}_{\lambda,n}(t_0,T)$, $1/p+1/q=1$;
5) если $\|K(t,t)\|\le N_0\lambda(t)$ и $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$, существует число $q>1$ такое, что $\ell^{q}(t)/\lambda^{q-1}(t)\in L^{1}(t_0,T)$ и $\lambda(t)\in L^{q_0}(t_0,T)$, $q_0>1$, то решение системы (I) единственно в $L^{p_1}_{n}(t_0,T)$, $p_1=pq_0/(q_0-1)$, $1/p+1/q=1$.

Построен пример, показывающий существенность условия б) для единственности решения системы (I).

Теорема 2. Пусть выполняются условия а) и б), $q_1>1$, $f(t)\in C^{1}_{\varphi,n}[t_0,T]$, $f(t_0)=0$, где $\varphi(t)=\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\,ds$, $t\in[t_0,T]$. Тогда
I) существует решение системы (I) в $L^{p_1}_{n}(t_0,T)$, $p_1>1$, $1/p_1+1/q_1=1$;
2) если $\|K(t,t)\|\le N_0\lambda(t)$ и $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$, $N_0>0$, существует число $q>1$ такое, что $\ell^{q}(t)/\lambda^{q-1}(t)\in L^{1}(t_0,T)$, $\lambda(t)\in L^{q_0}(t_0,T)$, $q_0>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1$, $p_1=pq_0/(q_0-1)$,

то существует единственное решение системы (I) в $L^{p_1}_{n}(t_0,T)$.

В дальнейшем для системы (I) обобщены результаты теоремы I и 2, когда существует конечное число точек t_i $(i=1,\dots,m)$ из сегмента $[t_0,T]$ таких, что $t_0<t_1<\dots<t_m=T$ и для матричных функций $(-1)^{i}K(t,s)$ определенных в области $\Omega^{i}=\{(t,s)\mid t_{i-1}<s<t<t_i\}$ $(i=1,\dots,m)$ *выполняются условия* а) и б).

Далее предполагается выполнение следующего условия:
в) при $\tau>\eta$ для любых (τ,s), $(\eta,s)\in\Omega$ справедлива оценка

$$\|K(\tau,s)-K(\eta,s)\|\le \ell(s)\Big(\int_{\eta}^{\tau}\lambda(s)\,ds\Big)\,\Big|\ln\Big(\int_{\eta}^{\tau}\lambda(s)\,ds\Big)\Big|,$$

где $\ell(t)\ge 0$ при $t\in[t_0,T]$, $\ell(t)\in L^{1}(t_0,T)$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия а) и в), $\|K(t,t)\|\le N_0\lambda(t)$ при $t\in[t_0,T]$, система (I) имеет решение $u(t)\in C^{\gamma}_{\varphi,n}[t_0,T]$, $0<\gamma\le 1$, $u(t_0)=0$, $\alpha=c_1\int_{t_0}^{T}\ell(s)\,ds<\gamma$, где $0<c_1$ – известное число, $\varphi(t)=\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\,ds$. Тогда решение $\vartheta(t,\varepsilon)$ системы

(3) при $\varepsilon \mapsto 0$ сходится по норме $C_n[t_0, T]$ к $u(t)$ и справедлива оценка

$$\| \vartheta(t,\varepsilon) - u(t) \|_C \leq C \varepsilon^{\gamma - \alpha},$$

где $0 < C$ – известная постоянная, независящая от ε.

Следствие. Пусть выполняются условия а) и в), $\|K(t,t)\| \leq N_0 \lambda(t)$ при $t \in [t_0, T]$, существуют числа $t' \in (t_0, T]$ и $q > 1$ такие, что $\lambda(t) > 0$ при почти всех $t \in (t_0, t')$ и $\ell^q(t) / \lambda^{q-1}(t) \in \in L^1(t_0, t')$. Тогда решение системы (I) единственно в $C^{\gamma}_{\varphi,n}[t_0,T]$, $0 < \gamma \leq 1$.

Здесь условия б) и в) означают связь между матричными функциями $K(t,s)$ и $K(t,t)$. В частности, если непрерывное матричное ядро $K(t,s)$ по t удовлетворяет условию Липшица и $K(t,t) = E_n$ – единичная матрица при $t \in [t_0, T]$, то условия а) и б) выполняются.

Результаты § I.2 носят вспомогательный характер. Здесь исследуются вопросы устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода на полуоси в различных пространствах.

В § I.3 системы (I) и (3) рассматриваются на полуоси $G = [t_0, \infty)$. В этом параграфе на основе результатов § I.2 перенесены основные результаты § I.I для системы (2) при $G = [t_0, \infty)$.

В § I.4 исследуются вопросы единственности, регуляризации и устойчивости решений систем (I) при $G = [a, b]$ с недифференцируемым матричным ядром. В частности, используя теоремы обобщающие теоремы Шмидта и Мерсера, установлена

Теорема 4. Пусть: I) $\int_a^b \int_a^t \|K(t,s)\|^2 ds\, dt < \infty$; 2) для любого $u(t) \in L^2_n(a, b)$ справедливо неравенство $\operatorname{Re} \langle Ku, u \rangle_{L^2_n} \geq 0$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_n}$ – скалярное произведение в $L^2_n(a, b)$; 3) для почти всех фиксированных $t \in [a, b)$ существует $x \in (t, b]$ такое, что

$$\det \left(\int_t^x K(s,t) ds \right) \neq 0 .$$

Тогда решение системы (I) в $L^2_n(a, b)$ единственно.

Следствие. Пусть матричное ядро $K(t,s) = (K_{ij}(t,s))$ непрерывно в Ω и выполняется условие 2) теоремы 4. Кроме того, пусть $\det[K(t,t)] \neq 0$ почти всюду в $[a, b]$ и

$$K_{ij}(t,t)=K_{ji}(t,t),\ i,j=1,\dots,n,\ t\in[a,b].$$

Тогда решение системы (I) единственно в $L^2_n(a,b)$.

В § I.5 результаты § I.I обобщены на нелинейные системы (2) и (4).

Во второй главе, в основном, исследованы вопросы единственности решения систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода типа свертки, систем линейных уравнений на коммутативном кольце и их приложений к различным некорректным задачам.

Вопросы единственности решения для скалярных линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода типа свертки полностью решены Е. Титчмаршем.

В § 2.I рассмотрены системы

$$A(t)*x(t)\equiv\int_0^t A(t-s)x(s)ds=f(t)\ ,\ t\in G\ , \qquad (6)$$

где $A(t)$ – $m\times n$ - матричная функция, $x(t)$ – n - мерная искомая вектор-функция и $f(t)$ – m – мерная вектор-функция, $G=R_+=[0,\infty)$ или $G=[0,T]$.

Обозначим через $C_n(G)$ – пространство n - мерных непрерывных вектор-функций на G. Для $u(t)\in C(G)$ и $v(t)\in C(G)$ определим сверточное (св.) умножение:

$$u(t)*v(t)=\int_0^t u(t-s)v(s)ds\ ,\ t\in G\ ,$$

где $C(G)$ – пространство непрерывных функций на G. Через $C_{mn}(G)$ – обозначим множество всех $m\times n$ – матриц $A(t)$ с элементами из $C(G)$.

В понятиях произведение матриц, определитель, алгебраические дополнения и минор, заменив умножение св.умножением, определим св.произведение матриц, св. определитель (св. det), св. алгебраические дополнения и св. минор. Далее, определим св. линейная комбинация, св. ранг и св. размерность.

<u>Определение</u>. *Множество всех векторов* $x(t)$ *из* $C_n(R_+)$, для которых $A(t)*x(t)=0$ при $t\in R_+$, есть аннулируемое подпространство матрицы $A(t)\in C_{mn}(R_+)$ и записывается как $N(A)$.

<u>Теорема 5</u>. Если $A(t)\in C_{mn}(R_+)$, то $A(t)$ имеет св.ранг

r в том и только в том случае, когда $N(A)$ имеет св. размерность $n-r$.

Следствие. Если $A(t) \in C_{nn}(R_+)$, то для того чтобы система (6) имела единственное решение в $C_n(R_+)$, необходимо и достаточно, чтобы $\text{св.} \det A(t)$ был не равен тождественно нулю на R_+.

В § 2.2, вводя понятие обобщенно обратимого элемента, результаты § 2.I перенесены на системы линейных уравнений на коммутативном кольце. В качестве примера рассмотрены система линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода типа свертки на $G=[0,T]$ и система линейных интегральных уравнений типа свертки на всей оси.

В § 2.3 сведением системы линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода типа свертки установлены необходимые и достаточные условия единственности решения обратных задач для уравнения параболического типа и гиперболического типа.

В третьей главе изучаются вопросы регуляризации, единственности и существования решений для систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными

$$\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} K(t,x,s,y)\,u(s,y)\,dy\,ds = f(t,x), \qquad (7)$$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} K(t,x,s,y,u(s,y))\,dy\,ds = f(t,x), \qquad (8)$$

где $(t,x) \in \bar{G} = [t_0,T]\times[x_0,l]$, $K(t,x,s,y)$ – $n\times n$ – матричная функция, $K(t,x,s,y,u)$ – n –мерная вектор-функция.

Обозначим через $C_n(\bar{G})$ и $L_n^p(G)$ пространства n – мерных вектор-функций с элементами из $C(\bar{G})$ и $L^p(G)$. Будем обозначать через $C_{\varphi,n}^{\gamma_1,\gamma_2}(\bar{G})$, $0<\gamma_i\le 1$, $i=1,2$, $\varphi(t,x)=(\varphi_1(t),\varphi_2(x))$, линейное пространство n – мерных непрерывных вектор-функций $u(t,x)$, определенных на $\bar{G}$ и удовлетворяющих условию

$$\|u(t,x)-u(s,x)-u(t,y)+u(s,y)\| \le C|\varphi_1(t)-\varphi_1(s)|^{\gamma_1}|\varphi_2(x)-\varphi_2(y)|^{\gamma_2},$$

$$\|u(t,x)-u(s,x)\| \le C\,|\varphi_1(t)-\varphi_1(s)|^{\gamma_1}, \quad \|u(t,x)-u(t,y)\| \le C\,|\varphi_2(x)-\varphi_2(y)|^{\gamma_2},$$

где $0<C$ – постоянная, зависящая от $u(t,x)$, но не от t, s, x и y.

В § 3.I исследована система (7). Всюду предполагается, что $K(t,x,t,x)$ представима в виде

$$K(t,x,t,x) = A(t)\,B(x)\,K_0(t,x),$$

где A, B, K_0 – $n\times n$ – матричные функции, $\|K_0(t,x)\|$ – непрерывная функция на $\bar{G}$ и $\det[K_0(t,x)] \neq 0$ при $(t,x)\in\bar{G}$. Поэтому не ограничивая общности предположим, что $K_0(t,x)=E_n$ при $(t,x)\in\bar{G}$, где E_n – $n\times n$ – единичная матрица.

Наряду с системой (7) рассматривается система интегральных уравнений второго рода

$$\begin{gathered}
\varepsilon^2 \vartheta(t,x,\varepsilon) + \varepsilon\int_{t_0}^{t} A(s)\,\vartheta(s,x,\varepsilon)\,ds + \varepsilon\int_{x_0}^{x} B(y)\,\vartheta(t,y,\varepsilon)\,dy + \\
+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} K(t,x,s,y)\,\vartheta(s,y,\varepsilon)\,dy\,ds = f(t,x) + \varepsilon^2[u(t_0,x) + \qquad (9) \\
+ u(t,x_0) - u(t_0,x_0)] + \varepsilon\Big[\int_{t_0}^{t} A(s)\,u(s,x_0)\,ds + \int_{x_0}^{x} B(y)\,u(t_0,y)\,dy\Big],
\end{gathered}$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр, $u(t,x)$ – решение системы (7)

При дополнительных предположениях, показано что решения $\vartheta(t,x,\varepsilon)$ системы (9) при $\varepsilon \mapsto 0$ сходятся по норме $C_n(\bar{G})$ к $u(t,x)$. Доказаны теоремы единственности в $C_n(\bar{G})$ и $C^{\gamma_1,\gamma_2}_{\varphi,n}(\bar{G})$. Установлена теорема существования в $L^p_n(G)$, $p>1$.

В § 3.2 основные результаты § 3.I обобщены на нелинейную систему (8).

В четвертой главе рассмотрены операторные уравнения Вольтерра

$$Vu \equiv \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)\,u(\tau)\,d\tau = f(t), \quad t\in[t_0,T], \qquad (10)$$

$$A(t)\,\frac{du}{dt} + M(t)\,u + Vu = f(t), \qquad (11)$$

$$\int_{t_0}^{t} K(t,\tau,u(\tau))\,d\tau = f(t)\ ,\quad t\in[t_0,T]\ , \qquad (12)$$

где $K(t,\tau)$, $A(\tau)$ и $M(t)$ – семейство операторов, для фиксированного $(t,\tau)\in\bar{G}=\{(t,\tau)\,|\,t_0\le\tau\le t\le T\}$ оператор $K(t,\tau,\cdot)$ действует в гильбертовом пространстве H.

В первом параграфе изучено уравнение (10). Пусть задан $I=(a,b)$ и однопараметрическое семейство гильбертовых пространств H_s, $s\in I$ с нормой $\|\cdot\|_s$ таких, что при $s'<s$

$$H_s\subseteq H_{s'}\ ,\quad \|u\|_{s'}=\sqrt{\langle u,u\rangle_{s'}}\le\|u\|_s\ ,\ \forall u\in H_s\ ,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$–скалярное произведение в H_s. Обозначим $C([t_0,T];H_s)$- банахово пространство непрерывных функций, определенных на $[t_0,T]$, принимающих значение в H_s, $s\in I$ и с нормой

$$\|u(t)\|_{C,S}=\max_{t\in[t_0,T]}\|u(t)\|_s\ .$$

Будем обозначать через $L^p_\lambda(t_0,T;H_s)$-банахово пространство функций, суммируемых по норме

$$\|u(t)\|_{p,\lambda,s}=\left\{\int_{t_0}^{T}\lambda(t)\|u(t)\|_s^p\,dt\right\}^{1/p},\quad p\ge 1\ ,$$

где $\lambda(t)$ – измеримая функция и $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$. Обозначим через $C^\gamma_\varphi([t_0,T];H_s)$, $0<\gamma\le 1$, линейное пространство всех функций $u(t)$, удовлетворяющих условие

$$\|u(t)-u(\tau)\|_s\le C|\varphi(t)-\varphi(\tau)|^\gamma\ ,$$

где $0\le C$ - постоянная зависящая от $u(t)$, но не от t и τ, $\varphi(t)$- цействительная измеримая неубывающая функция на $[t_0,T]$. Будем обозначать через $\mathcal{L}(H_s,H_{s'})$-пространство линейных ограниченных операторов, действующих из H_s в $H_{s'}$, $s'\le s$, $\|\cdot\|_{s,s'}$- норма в $\mathcal{L}(H_s,H_{s'})$.

В § 4.1 исследовано операторное уравнение (10), где $K(t,\tau)$- двухпараметрическое семейство операторов, $K(t,\tau)\in\mathcal{L}(H_s,H_{s'})$, $s'<s$, $s',s\in I$, $(t,\tau)\in G$.

Наряду с уравнением (10) будем рассматривать следующее уравнение

$$\varepsilon \vartheta(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)\vartheta(\tau,\varepsilon)\,d\tau = f(t), \quad t\in[t_0,T], \tag{13}$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр.

Потребуем выполнения следующих условий:

I. Для всех $s\in I$, $K(t,t)\in \mathcal{L}(H_s,H_s)$ при $t\in[t_0,T]$, $\|K(t,t)\|_{s,s}\in L^q(t_0,T)$, $q>1$ и для любого $u\in H_s$, $\mathrm{Re}<K(t,t)u,u>_s \geq \lambda(t)\|u\|_s^2$, $\lambda(t)\in L^q(t_0,T)$ и $\lambda(t)\geq 0$ при $t\in[t_0,T]$;

II. Для всех $s,s'\in I$, $s'<s$ и при $t>\eta$ для любых (t,τ), $(\eta,\tau)\in G$ имеет место оценка

$$\|K(t,\tau)-K(\eta,\tau)\|_{s,s'} \leq \ell(\tau)(t-\tau)^{\alpha-\alpha_0}(s-s')^{-\beta}\left(\int_\eta^t \lambda(\tau)\,d\tau\right),$$

где $\alpha_0\in[0,1)$, $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, $0\leq \ell(t)$ при $t\in[t_0,T]$, $\ell(t)\in L^{q_1}(t_0,T)$, $q_1>1$, $1/p_1+1/q_1=1$, $p_1\alpha_0<1$.

Теорема 6. Пусть выполняются услсвия I–II, $p_1(\beta+\alpha_0-\alpha)<1$, $\varphi(t)=\int_{t_0}^t\lambda(\tau)\,d\tau$ при $t\in[t_0,T]$. Тогда

1) если для всех $s\in I$, $\|K(t,t)\|_{s,s}\leq N_0\lambda(t)$ и $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$, $N_0>0$, для некоторых $s,s'\in I$, $s'<s$ выполнено неравенство

$$m_\varphi(s,s') = (N_0+e^{-1})\|\ell(t)\|_{q_1}(T-t_0)^{\alpha-\alpha_0+1/p_1}[1-p_1(\beta+\alpha_0-\alpha)]^{-1/p_1}(s-s')^{-\beta}<1,$$

уравнение (10) имеет решение $u(t)\in C([t_0,T];H_s)$, $u(t_0)=0$, то решение $\vartheta(t,\varepsilon)$ уравнения (13) при $\varepsilon\mapsto 0$ сходится по норме $C([t_0,T];H_{s'})$ к $u(t)$;

2) если для всех $s\in I$, $\|K(t,t)\|_{s,s}\leq N_0\lambda(t)$ при $t\in[t_0,T]$, $N_0>0$, для некоторых $s,s'\in I$, $s'<s$ выполнено неравенство $m_\varphi(s,s')<1$, уравнение (10) имеет решение $u(t)\in C_\varphi^{\gamma}([t_0,T];H_s)$, $0<\gamma\leq 1$, $u(t_0)=0$, то решение $\vartheta(t,\varepsilon)$ уравнения (13) при $\varepsilon\mapsto 0$ сходится по норме $C([t_0,T];H_{s'})$ к $u(t)$ и справедлива оценка

$$\|\vartheta(t,\varepsilon)-u(t)\|_{c,s'} \leq C_L\varepsilon^{\gamma}/[1-m_\varphi(s,s')],$$

где $0 < C_2$ – известная постоянная независящая от ε;
3) если $\alpha_0 = 0$, для некоторых $s, s' \in I$, $s' < s$ выполнено неравенство

$$m_1(s, s') = (T - t_0)^{\alpha + 1/p_1} \| \ell(t) \|_{q_1} [1 - p_1(\beta - \alpha)]^{-1/p_1} (s - s')^{-\beta} < 1,$$

уравнение (I0) имеет решение $u(t) \in C^1_\varphi([t_0, T]; H_s)$, $u(t_0) = 0$, то решение $\vartheta(t, \varepsilon)$ уравнения (I3) при $\varepsilon \mapsto 0$ сходится по норме $C([t_0, T]; H_{s'})$ к $u(t)$. При этом

$$\| \vartheta(t, \varepsilon) - u(t) \|_{C, s'} \leq M_1 \varepsilon / [1 - m_1(s, s')],$$

где $0 < M_1$ – известная постоянная не зависящая от ε;
4) если для всех $s \in I$, $\| K(t, t) \|_{s,s} \leq N_0 \lambda(t)$ и $\lambda(t) > 0$ при почти всех $t \in [t_0, T]$, $N_0 > 0$, $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$, $1/q = 1/q_1 + 1/(p_1 + \delta)$, $\delta > 0$, $(p_1 + \delta)(\beta + \alpha_0 - \alpha) < 1$, $\ell(t)/\lambda^{1/p}(t) \in L^{q_1}(t_0, T)$, для некоторых $s, s' \in I$, $s' < s$ выполнено неравенство

$$m_6(s, s') = (N_0 + e^1) \| \ell(t) / \lambda^{1/p}(t) \|_{q_1} (T - t_0)^{\alpha - \alpha_0 + 1/(p_1 + \delta)} [1 - (p_1 + \delta)(\beta + \alpha_0 - \alpha)]^{-1/(p_1 + \delta)} \| \lambda(t) \|_1^{1/p} (s - s')^{-\beta} < 1,$$

уравнение (I0) имеет решение $u(t) \in L^p_\lambda(t_0, T; H_s)$, то решение $\vartheta(t, \varepsilon)$ уравнения (I3) при $\varepsilon \mapsto 0$ сходится по норме $L^p_\lambda(t_0, T; H_{s'})$ к $u(t)$.

Следствие. Пусть выполняются условия I-II, $p_1(\beta + \alpha_0 - \alpha) < 1$. Тогда
I) если для всех $s \in I$, $\| K(t, t) \|_{s,s} \leq N_0 \lambda(t)$ и $\lambda(t) > 0$ при почти всех $t \in [t_0, T]$, $N_0 > 0$, то решение операторного уравнения (I0) единственно в $C([t_0, T]; H_s)$, $s \in I$;
2) если для всех $s \in I$, $\| K(t, t) \|_{s,s} \leq N_0 \lambda(t)$ при $t \in [t_0, T]$, $N_0 > 0$, существует число $\delta \in (t_0, T]$ такое, что $\lambda(t) > 0$ при почти всех $t \in [t_0, \delta)$, то решение уравнения (I0) единственно в $C^\gamma_\varphi([t_0, T]; H_s)$, $s \in I$, $0 < \gamma \leq 1$;
3) если $\alpha_0 = 0$ и существует число $\delta \in (t_0, T]$ такое, что $\lambda(t) > 0$ при почти всех $t \in (t_0, \delta)$, то решение уравнения (I0) единственно

в $C^1_\varphi([t_0,T],H_s)$, $s\in I$;

4) если для всех $s\in I$, $\|K(t,t)\|_{s,s}\le N_0\lambda(t)$ и $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$, $p>1$, $1/p+1/q=1$, $1/q=1/q_1+1/(p_1+\delta)$, $\delta>0$, $(p_1+\delta)(\beta+\alpha_0-\alpha)<1$, $\ell(t)/\lambda^{1/p}(t)\in L^{q_1}(t_0,T)$, то решение уравнения (I0) единственно в $L^p_\lambda(t_0,T,H_s)$ и $L^{p_0}(t_0,T,H_s)$, $p_0=pq/(q-1)$, $s\in I$.

Теорема 7. Пусть выполняются условия I-II, для некоторого $s\in I$, $f(t)\in C^1_\varphi([t_0,T];H_s)$, $f(t_0)=0$, $p_1(\beta+\alpha_0-\alpha)<1$, где $\varphi(t)=\int_{t_0}^t\lambda(\tau)d\tau$ при $t\in[t_0,T]$. Тогда

I) если для всех $s_1\in I$, $\|K(t,t)\|_{s_1,s_1}\le N_0\lambda(t)$ при $t\in[t_0,T]$, $N_0>0$, для некоторого $s'\in I$, $s'<s$ выполнено неравенство $m_\psi(s,s')<1$, где $m_\psi(s,s')$ определена в теореме 6, $p>1$, $1/p+1/q=1$, $1/q=1/q_1+1/(p_1+\delta)$, $0<\delta<(1-\alpha_0p_1)/\alpha_0$,

то существует решение уравнения (I0) в $L^{p_0}(t_0,T;H_{s'})$, $p_0\ge p$;

2) если выполняются условия случая I), $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$, $\ell(t)/\lambda^{1/p}(t)\in L^{q_1}(t_0,T)$, $(p_1+\delta)(\beta+\alpha_0-\alpha)<1$,

то существует единственное решение уравнения (I0) в $L^{p_0}(t_0,T;H_{s'})$, $p_0\ge pq/(q-1)$;

3) если $\alpha_0=0$, $p>1$, $1/p+1/q=1$, $1/q=1/q_1+1/(p_1+\delta)$, $\delta>0$, для некоторого $s'\in I$, $s'<s$ выполнено неравенство $m_1(s,s')<1$ где $m_1(s,s')$ – определена в теореме 6, то существует решение уравнения (I0) в $L^{p_0}(t_0,T;H_{s'})$, $p_0\ge p$.

В § 4.2 модификацией метода Ниренберга-Нисидь доказаны теоремы существования и единственности для операторных уравнений (I0) в шкале банаховых пространств. Построены вольтерровы регуляризирующие операторы для уравнения (I0) в шкале банаховых пространств.

В § 4.3 на основе полной спектральной теоремы фон Неймана и результатов § I.I доказаны теоремы единственности решения для операторных уравнений (I0) с коммутирующими операторными ядрами не сводящимся к семейству скалярных уравнений Вольтерра второго рода.

В § 4.4 выделены классы операторных уравнений (I0) и (II), для которых доказаны теоремы единственности.

В § 4.5. результаты § I.5 обобщены для нелинейных операторных уравнений (I2) в гильбертовом пространстве.

В пятой главе исследованы вопросы существования и единственности для задач интегральной геометрии сводящихся к операторным уравнениям Вольтерра первого рода в шкале банаховых пространств.

В § 5.I исследована следующая задача интегральной геометрии с неинвариантными ядрами

$$\iint a(x,y,\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,ds + \iiint\limits_{V(x,y)} K(x,y,\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = g(x,y), \quad (I4)$$

где $\Omega=\{(\xi,\eta)\mid \xi=(\xi_1,\xi_2)\in R^2,\ \eta\in[0,h]\}$, $\Delta(x,y)$ – семейство однополостных конусов, с вершинами $(x,y)\in\Omega$, $x=(x_1,x_2)$ и концами, лежащими на плоскости $\eta=0$, $V(x,y)$ – есть область, ограниченная поверхностью $\Delta(x,y)$ и плоскостью $\eta=0$, $(x,y)\in\Omega$. Основываясь на результатах § 4.2, для уравнения (I4) доказаны теоремы существования и единственности решения, причем теорема единственности доказана в пространстве $C([0,h];L^2(R^2))$.

В § 5.2 и § 5.3 аналогичные результаты получены для одной задачи интегральной геометрии на плоскости и для задач интегральной геометрии с пространственными кривыми.

В § 5.4 рассмотрено следующее уравнение с неинвариантными ядрами

$$u(x,y)+\sum_{|\alpha|=0}^{m}\int_0^y d\eta\Big[\int_{S_{m_\alpha}} K_\alpha(x,y,x+f_\alpha(y,\eta,\nu_\alpha),\eta)\,D^\alpha u(x+f_\alpha(y,\eta,\nu_\alpha),\eta)\,dS_{m_\alpha}+\int_0^{\varphi_\alpha(y,\eta)} d\rho\int_{\sigma_{n_\alpha}} Q_\alpha(x,y,x+g_\alpha(y,\eta,\rho,\omega_\alpha),\eta,\rho)\,D^\alpha u(x+g_\alpha(y,\eta,\rho,\omega_\alpha),\eta)\,d\sigma_{n_\alpha}\Big]=\vartheta(x,y), \quad (I5)$$

где $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$, $(y,\eta)\in\bar G=\{(y,\eta)\mid 0\le\eta\le y\le h\}$,

$f_\alpha=(f_{1\alpha},\dots,f_{n_\alpha})$, $g_\alpha=(g_{1\alpha},\dots,g_{n_\alpha})$, K_α, Q_α, $f_{i\alpha}$,

$g_{i\alpha}$, φ_α — известные непрерывные функции, S_{m_α} и σ_{n_α} — ограниченные соответственно m_α — мерные и n_α — мерные гладкие поверхности, $m_\alpha < n$, $n_\alpha < n$,

$$\mathcal{D}^\alpha u(x,\eta) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} u(x,\eta), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le m.$$

Из § 5.I-5.3 видно, что уравнение (I5) связано с задачами интегральной геометрии. Для уравнения (I5) доказана теорема единственности решения в пространстве $C([o,h];W_2^m(R^n))$, являющаяся разновидностью теоремы Хольмгрена, где $W_2^m(R^n)$ — пространство Соболева.

Литература

1. Асанов А. Достаточные условия единственности решения уравнений Вольтерра и Вольтерра-Урысона //Изв. АН Кирг. ССР.-1978.- - № 3.-с.3-7.
2. Асанов А. О единственности решения систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода типа свертки //Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики.-Новосибирск, 1978.-с.26-34.
3. Асанов А. Регуляризация и достаточные условия единственности решения линейного интегрального уравнения типа Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве непрерывных функций //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- - Фрунзе: Илим, 1979.- вып.I2.-с.I54-I64.
4. Асанов А. Регуляризация и достаточные условия единственности решения для интегральных уравнений Вольтерра и Вольтерра-Урысона. //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.-Фрунзе: Илим, 1979.- вып.I2.- с.I65-I76.
5. Асанов А. О единственности решения некоторых линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода //Всесоюзная конференция по некорректно поставленным задачам (тез. докл.)- Фрунзе: Илим, 1979.
6. Асанов А. Регуляризация и единственность решения линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.-

-Фрунзе: Илим, 1980.-вып.13.- с.207-214.
7. Регуляризация операторного уравнения Вольтерра первого рода //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1981.- вып.14.- с.235-245.
8. Асанов А. Об одном классе уравнений Вольтерра //Исслед. корректности обратных задач и некоторых операторных уравнений.- Новосибирск, 1981.- с.13-19.
9. Асанов А. О единственности решения для одного класса операторных уравнений Вольтерра //Вопросы корректности обратных задач математической физики.- Новосибирск, 1982.- с.12-19.
10. Асанов А. Регуляризация операторного уравнения Вольтерра в шкале банаховых пространств //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1984.- вып.17.- с.205-210.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ОСНОВНЫМ РЕЗУЛЬТАТАМ ДИССЕРТАЦИИ

1. Асанов А. Об одном классе интегральных уравнений Вольтерра первого рода //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- -Фрунзе: Илим, 1981.- вып.14.- с.227-234.
2. Асанов А. Один класс операторных уравнений Вольтерра //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1983.- вып. 16.- с.269-276.
3. Асанов А. Об одном классе систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода //Функцион. анализ и его приложения.-1983.- - т.17, вып.4.- с.73-74.
4. Асанов А. О единственности и существовании решения систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода типа свертки //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1985.- вып.18.- с.9-16.
5. Асанов А. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на полуоси //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1985.- вып.18.- с.17-20.
6. Асанов А. Сверточные свойства непрерывных матричных функций //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1986.- вып.19.- с.175-185.
7. Асанов А. Система линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода типа свертки на полуоси //Исслед. по интегро-

-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1986.- вып.19.- с. 186-190.
8. Асанов А. Коммутативная алгебра с обобщенно обратными элементами и система уравнений на ней //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1987.- вып.20.- с.39-52.
9. Асанов А. Коммутативное кольцо и система уравнений на нем //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1988.- вып.21.- с.39-56.
10. Асанов А. О единственности решения операторных уравнений Вольтерра //Изв. АН Кирг. ССР.- 1988.- №1.- с.13-18.
11. Асанов А. Устойчивость решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода на полуинтервале //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1989.- вып. 22.- с.123-129.
12. Асанов А. О системе линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на полуинтервале //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1989.- вып.22.- с.130-139.
13. Асанов А. Операторные уравнения Вольтерра первого рода в шкалах гильбертовых пространств //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Бишкек: Илим, 1991.- вып.23.- с.67-80.
14. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- - Фрунзе: Илим, 1988.- вып.21.- с.3-38.
15. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода //Докл. АН СССР.- - 1989.- т.309, № 5.- с.1052-1055.
16. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода //Всесоюзная конференция по условно-корректным задачам (тез. докл.)- Алма-Ата, 1989.
17. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода //Докл. АН СССР.- 1991.- т.317, №1.- с.32-35.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность академику М.М.Лаврентьеву и член-корр. АН СССР М.И.Иманалиеву познакомивших автора с интересной тематикой интегральных и операторных уравнений Вольтерра, за их многочисленные полезные обсуждения задач рассмотренных в данной работе.

ПОДПИСАНО К ПЕЧАТИ 18.12.92 ФОРМАТ 60 X 84 /16

ОБЪЕМ 1,5 П. Л. ТИРАЖ 100 ЭКЗ. ЗАКАЗ № 806

РОТАПРИНТ НГУ, 630090, НОВОСИБИРСК-90, УЛ. ПИРОГОВА, 2.